練習ドリル 数学Ⅲ
標準編

■ 解答編 ■

数研出版
https://www.chart.co.jp

練習ドリル　数学Ⅲ　標準編
解　答　編

注意　まず最初に答の数値のみを示し，続いて計算のポイント，解説を順に示した。

第１回

(1)　値域 $y \neq -1$，$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動

(2)　値域 $y \neq 2$，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動

(3)　値域 $y \neq -2$，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動

(4)　$y<\dfrac{1}{2}$，$2 \leqq y$

> $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc \neq 0)$ は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形
> $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもの

解説

(1)　$y=\dfrac{3}{x}-1$ のグラフは，$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
値域は　$y \neq -1$

(2)　$y=\dfrac{1}{x-1}+2$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。値域は　$y \neq 2$

(3)　$\dfrac{2x-3}{1-x}=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}$

$=\dfrac{1}{x-1}-2$

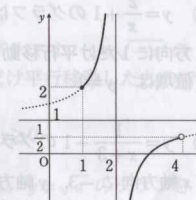
よって，$y=\dfrac{2x-3}{1-x}$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。値域は　$y \neq -2$

(4)　$\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}+1$

よって，$y=\dfrac{x-3}{x-2}$ のグラフは，$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
また

$x=1$ のとき　$y=2$

$x=4$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}$

よって，上の図から，値域は　$y<\dfrac{1}{2}$，$2 \leqq y$

第2回

(1)　値域 $y\neq 1$，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動

(2)　値域 $y\neq -1$，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に -1 だけ平行移動

(3)　値域 $y\neq -1$，$y=-\dfrac{6}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動

(4)　$y<1$，$3\leqq y$

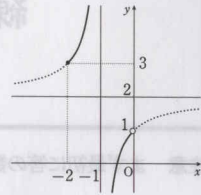
> $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$ は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形
> $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもの

解説

(1)　$y=\dfrac{2}{x}+1$ のグラフは，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
値域は　$y\neq 1$

(2)　$y=\dfrac{1}{x+3}-1$ のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
値域は　$y\neq -1$

(3)　$\dfrac{x+4}{2-x}=\dfrac{-x-4}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-6}{x-2}$
$=-\dfrac{6}{x-2}-1$
よって，$y=\dfrac{x+4}{2-x}$ のグラフは，$y=-\dfrac{6}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
値域は　$y\neq -1$

(4)　$\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=-\dfrac{1}{x+1}+2$
よって，$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフは，$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。
また
$x=-2$ のとき　$y=3$
$x=0$ 　のとき　$y=1$
よって，上の図から，値域は　$y<1$，$3\leqq y$

第3回

(1)　定義域 $x\geqq 2$，値域 $y\geqq 0$
(2)　定義域 $x\geqq -1$，値域 $y\leqq 0$
(3)　定義域 $x\leqq 4$，値域 $y\geqq 0$
(4)　$1\leqq y\leqq \sqrt{6}$
(5)　$-3<y\leqq -\sqrt{3}$

> $y=\sqrt{ax+b}\ (a\neq 0)$ は，$y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形
> $y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの

解説

(1)　$y=\sqrt{x-2}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\geqq 2$，値域は $y\geqq 0$

(2)　$y=-\sqrt{x+1}$ のグラフは，$y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\geqq -1$，値域は $y\leqq 0$

(3)　$\sqrt{4-x}=\sqrt{-(x-4)}$
よって，$y=\sqrt{4-x}$ のグラフは，$y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 4 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\leqq 4$，値域は $y\geqq 0$

(4)　$y=\sqrt{x+3}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。
また　$x=-2$　のとき　$y=1$
　　　$x=3$　のとき　$y=\sqrt{6}$
よって，値域は　$1\leqq y\leqq \sqrt{6}$

(5)　$-\sqrt{3x-6}=-\sqrt{3(x-2)}$
よって，$y=-\sqrt{3x-6}$ のグラフは，$y=-\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。
また　$x=3$　のとき　$y=-\sqrt{3}$
　　　$x=5$　のとき　$y=-3$
よって，値域は　$-3<y\leqq -\sqrt{3}$

第4回

(1)　定義域 $x\geqq -1$，値域 $y\geqq 0$
(2)　定義域 $x\geqq 3$，値域 $y\leqq 0$
(3)　定義域 $x\leqq 1$，値域 $y\geqq 0$
(4)　$1\leqq y\leqq \sqrt{3}$
(5)　$-2<y\leqq 0$

> $y=\sqrt{ax+b}\ (a\neq 0)$ は，$y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形
> $y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの

解説

(1)　$y=\sqrt{x+1}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\geqq -1$，値域は $y\geqq 0$

(2)　$y=-\sqrt{x-3}$ のグラフは，$y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\geqq 3$，値域は $y\leqq 0$

(3)　$\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$
よって，$y=\sqrt{1-x}$ のグラフは，$y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
定義域は $x\leqq 1$，値域は $y\geqq 0$

(4)　$y=\sqrt{x-1}$ のグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。
また　$x=2$　のとき　$y=1$
　　　$x=4$　のとき　$y=\sqrt{3}$
よって，値域は　$1\leqq y\leqq \sqrt{3}$

(5)　$y=-\sqrt{x-2}$ のグラフは，$y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。
また　$x=2$　のとき　$y=0$
　　　$x=6$　のとき　$y=-2$
よって，値域は　$-2<y\leqq 0$

第５回

(1)　$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

(2)　$y=\sqrt{x-2}$

(3)　$y=\frac{x+2}{x-1}$

(4)　$y=\frac{1-x}{x}$　$(-1\leqq x<0)$

(5)　$y=3^x+1$

> [1] 式 $y=f(x)$ を $x=g(y)$ の形に変形する
> [2] x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ とする

解説

(1)　$y=3x+1$ を x について解くと

$$x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$$

よって，逆関数は　$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

(2)　この関数の値域は　$y\geqq 2$

$y=x^2+2$ を x について解くと，$x\geqq 0$ であるから

$x=\sqrt{y-2}$　$(y\geqq 2)$

よって，逆関数は　$y=\sqrt{x-2}$

(3)　$\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$ であるから，

この関数の値域は $y\neq 1$ である。

$y=\frac{x+2}{x-1}$ を変形すると

$y(x-1)=x+2$

より　$(y-1)x=y+2$

$y\neq 1$ であるから　$x=\frac{y+2}{y-1}$

よって，逆関数は　$y=\frac{x+2}{x-1}$

(4)　この関数の値域は　$-1\leqq y<0$

$y=\frac{1}{x+1}$ を変形すると

$y(x+1)=1$

より　$yx=1-y$

$y\neq 0$ であるから　$x=\frac{1-y}{y}$

よって，逆関数は　$y=\frac{1-x}{x}$ $(-1\leqq x<0)$

(5)　$y=\log_3(x-1)$　から　$x-1=3^y$

すなわち　$x=3^y+1$

よって，逆関数は　$y=3^x+1$

第６回

(1)　$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(2)　$y=\sqrt{1-x}$

(3)　$y=\frac{-x-1}{x-2}$

(4)　$y=\frac{-x-1}{x}$　$(-1\leqq x<0)$

(5)　$y=\log_2 x$

> [1] 式 $y=f(x)$ を $x=g(y)$ の形に変形する
> [2] x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ とする

解説

(1)　$y=2x+3$ を x について解くと

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$

よって，逆関数は　$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(2)　この関数の値域は　$y\leqq 1$

$y=-x^2+1$ を x について解くと，

$x\geqq 0$ であるから　$x=\sqrt{1-y}$　$(y\leqq 1)$

よって，逆関数は　$y=\sqrt{1-x}$

(3)　$\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$ である

から，この関数の値域は $y\neq 2$ である。

$y=\frac{2x-1}{x+1}$ を変形すると

$y(x+1)=2x-1$

より　$(y-2)x=-y-1$

$y\neq 2$ であるから　$x=\frac{-y-1}{y-2}$

よって，逆関数は　$y=\frac{-x-1}{x-2}$

(4)　この関数の値域は　$-1\leqq y<0$

$y=-\frac{1}{x+1}$ を変形すると

$y(x+1)=-1$

より　$yx=-y-1$

$y\neq 0$ であるから　$x=\frac{-y-1}{y}$

よって，逆関数は　$y=\frac{-x-1}{x}$ $(-1\leqq x<0)$

(5)　$y=2^x$ から　$x=\log_2 y$

よって，逆関数は　$y=\log_2 x$

第７回

(1)　$(g\circ f)(x)=4x^2-4x+2$，$(f\circ g)(x)=2x^2+1$

(2)　$(g\circ f)(x)=3^{3x+1}$，$(f\circ g)(x)=3^{x+1}+1$

(3)　$(g\circ f)(x)=\frac{2}{x^2}+1$，$(f\circ g)(x)=\frac{1}{2x^2+1}$

(4)　$(g\circ f)(x)=\sin(5x-1)$，$(f\circ g)(x)=5\sin x-1$

(5)　$(g\circ f)(x)=3x$，$(f\circ g)(x)=x^3$

> $(g\circ f)(x)=g(f(x))$，$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

解説

(1)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$
$=(2x-1)^2+1$
$=4x^2-4x+2$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$
$=2(x^2+1)-1$
$=2x^2+1$

(2)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$
$=3^{3x+1}$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3^x)$
$=3(3^x)+1$
$=3^{x+1}+1$

(3)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)$
$=2\left(\frac{1}{x}\right)^2+1$
$=\frac{2}{x^2}+1$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2+1)$
$=\frac{1}{2x^2+1}$

(4)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(5x-1)$
$=\sin(5x-1)$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sin x)$
$=5\sin x-1$

(5)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(8^x)$
$=\log_2 8^x$
$=x\log_2 8=3x$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_2 x)$
$=8^{\log_2 x}=2^{3\log_2 x}$
$=2^{\log_2 x^3}=x^3$

注意　$a^{\log_a P}=P$

第８回

(1)　$(g\circ f)(x)=4x^2+4x$，$(f\circ g)(x)=2x^2-1$

(2)　$(g\circ f)(x)=2^{2x-1}$，$(f\circ g)(x)=2^{x+1}-1$

(3)　$(g\circ f)(x)=\frac{12}{x^2}+1$，$(f\circ g)(x)=\frac{2}{3x^2+1}$

(4)　$(g\circ f)(x)=\cos(3x+1)$，$(f\circ g)(x)=3\cos x+1$

(5)　$(g\circ f)(x)=\frac{x}{2}$，$(f\circ g)(x)=\sqrt{x}$

> $(g\circ f)(x)=g(f(x))$，$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

解説

(1)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$=(2x+1)^2-1$
$=4x^2+4x$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)$
$=2(x^2-1)+1$
$=2x^2-1$

(2)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$
$=2^{2x-1}$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2^x)$
$=2(2^x)-1$
$=2^{x+1}-1$

(3)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)$
$=3\left(\frac{2}{x}\right)^2+1$
$=\frac{12}{x^2}+1$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x^2+1)$
$=\frac{2}{3x^2+1}$

(4)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)$
$=\cos(3x+1)$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\cos x)$
$=3\cos x+1$

(5)　$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3^x)$
$=\log_9 3^x=x\log_9 3=\frac{x}{2}$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_9 x)$
$=3^{\log_9 x}=3^{\frac{\log_3 x}{\log_3 9}}$
$=3^{\log_3\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

注意　$a^{\log_a P}=P$

第９回

(1)　∞に発散　(2)　∞に発散
(3)　振動　(4)　∞に発散
(5)　0に収束　(6)　−∞に発散
(7)　∞に発散　(8)　振動
(9)　振動　(10)　0に収束

収束	極限は一定の値	$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$
発散	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
	振動…極限はない	

解説　(1)　$\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$ から，∞に発散。

(2)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-4)=\infty$ から，∞に発散。

(3)　$a_n=(-1)^n\cdot 3$ とおくと，$a_{2n}=3$，$a_{2n-1}=-3$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to 3$，$a_{2n-1}\to -3$
よって，振動。

(4)　$\lim_{n\to\infty}3^n=\infty$ から，∞に発散。

(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2^n}=0$ から，0に収束。

(6)　$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n^2}{5}\right)=-\infty$ から，−∞に発散。

(7)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3n}=\infty$ から，∞に発散。

(8)　$a_n=\frac{n}{(-1)^n}$ とおくと，$a_{2n}=2n$，
$a_{2n-1}=-(2n-1)$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to\infty$，$a_{2n-1}\to-\infty$
よって，振動。

(9)　$a_n=(-3)^{n-1}$ とおくと，
$a_{2n}=-3^{2n-1}$，$a_{2n-1}=3^{2n-2}$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to-\infty$，$a_{2n-1}\to\infty$
よって，振動。

(10)　$\sin n\pi=0$ から　$\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0$
よって，0に収束。

第１０回

(1)　∞に発散　(2)　−∞に発散
(3)　振動　(4)　∞に発散
(5)　0に収束　(6)　−∞に発散
(7)　∞に発散　(8)　振動
(9)　振動　(10)　0に収束

収束	極限は一定の値	$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$
発散	正の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$
	負の無限大に発散	$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$
	振動…極限はない	

解説　(1)　$\lim_{n\to\infty}(3n-1)=\infty$ から，∞に発散。

(2)　$\lim_{n\to\infty}(7-n^2)=-\infty$ から，−∞に発散。

(3)　$a_n=-2\cdot(-1)^n$ とおくと，$a_{2n}=-2$，
$a_{2n-1}=2$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to-2$，$a_{2n-1}\to 2$
よって，振動。

(4)　$\lim_{n\to\infty}5^n=\infty$ から，∞に発散。

(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3^n}=0$ から，0に収束。

(6)　$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{n}{2}\right)=-\infty$ から，−∞に発散。

(7)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ から，∞に発散。

(8)　$a_n=1-(-1)^n$ とおくと，$a_{2n}=0$，$a_{2n-1}=2$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to 0$，$a_{2n-1}\to 2$
よって，振動。

(9)　$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n^2$ とおくと，
$a_{2n}=-(2n)^2$，$a_{2n-1}=(2n-1)^2$
$n\to\infty$ のとき $a_{2n}\to-\infty$，$a_{2n-1}\to\infty$
よって，振動。

(10)　$\tan n\pi=0$ から　$\lim_{n\to\infty}\tan n\pi=0$
よって，0に収束。

第１１回

(1)　∞　(2)　−∞　(3)　2
(4)　$\frac{3}{2}$　(5)　3　(6)　$\frac{5}{3}$　(7)　$\frac{7}{3}$
(8)　0　(9)　∞　(10)　−2

> 多項式…最高次の項でくくり出す
> 分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説

(1)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)=\infty$

(2)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(-2+\frac{5}{n^2}\right)=-\infty$

(3)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{5}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2$

(4)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$

(5)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1-\frac{4}{n^2}}=\frac{3-0}{1-0}=3$

(6)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{5-0+0}{3+0}=\frac{5}{3}$

(7)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}{3-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=\frac{7+0+0}{3-0+0}=\frac{7}{3}$

(8)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0}=0$

(9)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{6}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\infty$

(10)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}$
$=\frac{-4+0}{2-0}=-2$

第１２回

(1)　∞　(2)　−∞　(3)　$\frac{1}{4}$
(4)　$\frac{2}{5}$　(5)　$\frac{1}{2}$　(6)　4　(7)　$\frac{5}{6}$
(8)　0　(9)　−∞　(10)　−1

> 多項式…最高次の項でくくり出す
> 分数式…分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説　(1)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2-\frac{7}{n}\right)=\infty$

(2)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(-1+\frac{3}{n^2}\right)=-\infty$

(3)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{4-\frac{3}{n}}=\frac{1-0}{4-0}=\frac{1}{4}$

(4)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}}=\frac{2-0}{5+0}=\frac{2}{5}$

(5)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$

(6)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}}=\frac{4+0-0}{1-0}=4$

(7)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{6+\frac{1}{n}}=\frac{5-0+0}{6+0}=\frac{5}{6}$

(8)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{2-0}=0$

(9)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{-7n+\frac{2}{n}}{1+\frac{9}{n}}=-\infty$

(10)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-8}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{8}{n}}{3-\frac{2}{n}}$
$=\frac{-3-0}{3-0}=-1$

第１３回

(1)　0
(2)　2
(3)　∞
(4)　0
(5)　1

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る 無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

(1)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{0}{1}=0$

(2)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}+1}=\dfrac{4}{1+1}=2$

(3)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty$

(4)　(与式)

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n-2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)-(n+1)}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+1}}=0$

(5)　(与式)

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+2n-1}-n)(\sqrt{n^2+2n-1}+n)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2n-1)-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$

第１４回

(1)　0
(2)　3
(3)　∞
(4)　0
(5)　$\dfrac{3}{2}$

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る 無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

(1)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{n}}}{1+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{0}{1}=0$

(2)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{6}{1+1}=3$

(3)　(与式)

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{(n+3)-(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})=\infty$

(4)　(与式)

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(5)　(与式)

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

第１５回

(1)　0 に収束　　(2)　∞ に発散
(3)　0 に収束　　(4)　振動
(5)　0 に収束　　(6)　振動
(7)　振動　　(8)　0 に収束
(9)　振動　　(10)　振動

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限 $r>1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ $r=1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$ $\lvert r\rvert<1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ $r\leqq -1$　のとき　振動 …… 極限はない

解説

(1)　$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(2)　$\dfrac{4}{3}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n=\infty$
よって，∞ に発散する。

(3)　$\left|-\dfrac{1}{6}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(4)　$-\dfrac{5}{4}<-1$ であるから，振動する。

(5)　$|0.31|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(0.31)^n=0$
よって，0 に収束する。

(6)　$-5.23<-1$ であるから，振動する。

(7)　振動する。

(8)　$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$
ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\left\{3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}=3\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(9)　$-\dfrac{5}{2}<-1$ であるから，振動する。

(10)　$-\dfrac{7}{5}<-1$ であるから，振動する。

第１６回

(1)　0 に収束　　(2)　∞ に発散
(3)　0 に収束　　(4)　振動
(5)　∞ に発散　　(6)　0 に収束
(7)　0 に収束　　(8)　振動
(9)　振動　　(10)　振動

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限 $r>1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ $r=1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$ $\lvert r\rvert<1$　のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ $r\leqq -1$　のとき　振動 …… 極限はない

解説

(1)　$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(2)　$\dfrac{3}{2}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=\infty$
よって，∞ に発散する。

(3)　$\left|-\dfrac{1}{4}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(4)　$-\dfrac{7}{6}<-1$ であるから，振動する。

(5)　$1.38>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(1.38)^n=\infty$
よって，∞ に発散する。

(6)　$|-0.99|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(-0.99)^n=0$
よって，0 に収束する。

(7)　$\left|\dfrac{1}{5}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$
ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\left\{4\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}=4\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$
よって，0 に収束する。

(8)　振動する。

(9)　$-\dfrac{4}{3}<-1$ であるから，振動する。

(10)　$-\dfrac{5}{2}<-1$ であるから，振動する。

第１７回

(1) 2　(2) $\frac{1}{3}$

(3) -4　(4) 0

(5) ∞　(6) $-\infty$

(7) $-\infty$　(8) 1

(9) 0　(10) ∞

> 分母の最高次の項で分母・分子を割る
> 最高次の項でくくり出す

解説

(1) (与式)$=2$

(2) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$

(3) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4^n}-4\right)=-4$

(4) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{2}{4^n}}=\frac{0}{1-0}=0$

(5) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{5}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=\infty$

(6) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{3^n}-\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^n}}=-\infty$

(7) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}=-\infty$

(8) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$

(9) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{5}{4^n}}=\frac{0}{1-0}=0$

(10) (与式)$=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

第１８回

(1) 4　(2) 1

(3) -9　(4) 0

(5) ∞　(6) $-\infty$

(7) ∞　(8) -1

(9) 0　(10) $-\infty$

> 分母の最高次の項で分母・分子を割る
> 最高次の項でくくり出す

解説

(1) (与式)$=4$

(2) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{4^n}\right)=1$

(3) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3^n}-9\right)=-9$

(4) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3^n}}=\frac{0}{1+0}=0$

(5) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n+\frac{2}{4^n}}{1+\frac{1}{4^n}}=\infty$

(6) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{2^n}-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2^n}}=-\infty$

(7) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$

(8) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n-1}{1+\left(-\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{0-1}{1+0}=-1$

(9) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0}{1+0}=0$

(10) (与式)$=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$

第１９回

(1) 発散

(2) 収束，$-\frac{16}{3}$

(3) 発散

(4) 発散

(5) 収束，$\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$

> 無限等比級数　$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$
> $a\neq0$ の場合　$|r|<1$ のとき収束し，和は $\frac{a}{1-r}$
> $|r|\geqq1$ のとき　発散
> $a=0$ の場合収束し，和は 0

解説

(1) 初項は 1，公比は $r=3$
$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(2) 初項は -8，公比は $r=-\frac{1}{2}$ で　$|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{-8}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{16}{3}$$

(3) 初項は $\sqrt{2}$，公比は $r=\sqrt{2}$
$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(4) 初項は -3，公比は $r=-1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(5) 初項は $3+\sqrt{2}$，公比は

$$r=\frac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$$

$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$$

第２０回

(1) 収束，$-\frac{2}{3}$

(2) 収束，10

(3) 収束，$\frac{81}{4}$

(4) 発散

(5) 収束，1

> 無限等比級数　$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$
> $a\neq0$ の場合　$|r|<1$ のとき収束し，和は $\frac{a}{1-r}$
> $|r|\geqq1$ のとき　発散
> $a=0$ の場合収束し，和は 0

解説

(1) 初項は -1，公比は $r=-\frac{1}{2}$ で　$|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3}$$

(2) 初項は 1，公比は $r=0.9$ で　$|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-0.9}=\frac{1}{0.1}=10$$

(3) 初項は 27，公比は $r=-\frac{1}{3}$ で　$|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{27}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{81}{4}$$

(4) 初項は 2，公比は $r=\sqrt{3}$
$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(5) 初項は $2-\sqrt{2}$，公比は

$$r=\frac{3\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{2}-4)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$$

$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{2-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1$$

第２１回

(1) $\frac{3}{2}$　(2) $\frac{12}{5}$　(3) $\frac{3}{4}$　(4) $\frac{16}{5}$

> 無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$
> $a\neq0$ の場合　$|r|<1$ のとき収束し，和は $\frac{a}{1-r}$
> $|r|\geqq1$ のとき　発散
> $a=0$ の場合収束し，和は0

解説 (1) 初項は1，公比は $r=\frac{1}{3}$ で $|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

(2) 初項は3，公比は $r=-\frac{1}{4}$ で $|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{12}{5}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ は，ともに公比の絶対値が1より小さい無限等比級数であるから収束する。
よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(4) (与式)$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が1より小さい無限等比級数であるから収束する。
よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$
$$=3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$$

第２２回

(1) $\frac{5}{4}$　(2) $6(2+\sqrt{3})$　(3) $\frac{3}{4}$　(4) $\frac{1}{2}$

> 無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$
> $a\neq0$ の場合　$|r|<1$ のとき収束し，和は $\frac{a}{1-r}$
> $|r|\geqq1$ のとき　発散
> $a=0$ の場合収束し，和は0

解説 (1) 初項は1，公比は $r=\frac{1}{5}$ で $|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

(2) 初項は3，公比は $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ で $|r|<1$
よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{2-\sqrt{3}}=\frac{6(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$
$$=6(2+\sqrt{3})$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ は，ともに公比の絶対値が1より小さい無限等比級数であるから収束する。
よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(4) (与式)$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が1より小さい無限等比級数であるから収束する。
よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

第２３回

(1) 10
(2) 7
(3) 17
(4) -2
(5) $-\frac{1}{2}$
(6) $-\frac{1}{3}$
(7) 3
(8) 1
(9) 0
(10) 3

> x の多項式で表される関数，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などの関数 $f(x)$ については，a が関数の定義域に属するとき　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

解説

(1) (与式)$=2^2+3\cdot2=10$
(2) (与式)$=(-1)^2-2\cdot(-1)+4=7$
(3) (与式)$=3^3-3\cdot3-1=17$
(4) (与式)$=(1+1)\cdot(2\cdot1-3)=-2$
(5) (与式)$=\frac{2\cdot0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$
(6) (与式)$=\frac{(-2)+3}{\{(-2)-1\}\{(-2)^2-3\}}=-\frac{1}{3}$
(7) (与式)$=\sqrt{4\cdot2+1}=\sqrt{9}=3$
(8) (与式)$=3^0=1$
(9) (与式)$=\log_3 1=0$
(10) (与式)$=\log_2 8=3$

第２４回

(1) 6
(2) -12
(3) 17
(4) 4
(5) $\frac{1}{2}$
(6) 2
(7) $2\sqrt{2}$
(8) 2
(9) 0
(10) 2

> x の多項式で表される関数，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などの関数 $f(x)$ については，a が関数の定義域に属するとき　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

解説

(1) (与式)$=2\cdot2^2-2=6$
(2) (与式)$=(-1)^2+5\cdot(-1)-8=-12$
(3) (与式)$=3\cdot2^3-4\cdot2+1=17$
(4) (与式)$=(2\cdot0-1)(3\cdot0-4)=4$
(5) (与式)$=\frac{1-2\cdot1}{1-3}=\frac{1}{2}$
(6) (与式)$=\frac{(-1)-3}{\{(-1)+2\}\{(-1)^2-3\}}=2$
(7) (与式)$=\sqrt{3\cdot3-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
(8) (与式)$=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$
(9) (与式)$=\log_2 1=0$
(10) (与式)$=\log_3 9=2$

第２５回

(1) 2

(2) 2

(3) $-\dfrac{1}{4}$

(4) $\dfrac{7}{5}$

(5) $-\dfrac{8}{3}$

(6) 12

(7) $\dfrac{4}{27}$

(8) 6

(9) -1

(10) $-\dfrac{3}{2}$

分数式…約分をする

解説

(1) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2$

(2) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x}=2$

(3) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+3}=-\frac{1}{4}$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to-3}\frac{2x-1}{x-2}=\frac{7}{5}$

(5) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(3x-1)(x-3)}{3x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}(x-3)=-\frac{8}{3}$

(6) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+4)=12$

(7) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x^2+3x+9}=\frac{4}{27}$

(8) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+6x}{x}=\lim_{x\to0}(x+6)=6$

(9) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-x-1)}{x(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-1}{x}=-1$

(10) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{6-3(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to0}\frac{-3x}{x(x+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{-3}{x+2}=-\frac{3}{2}$

第２６回

(1) -3

(2) $\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{5}{4}$

(4) $\dfrac{7}{3}$

(5) $\dfrac{1}{2}$

(6) 27

(7) $\dfrac{5}{12}$

(8) -2

(9) $-\dfrac{1}{4}$

(10) -2

分数式…約分をする

解説

(1) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)}{x}=\lim_{x\to0}(x-3)=-3$

(2) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$

(3) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to-2}\frac{3x-1}{x-1}=\frac{7}{3}$

(5) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)(x+1)}{2x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}(x+1)=\frac{1}{2}$

(6) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)=27$

(7) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x^2+2x+4}=\frac{5}{12}$

(8) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to0}(x-2)=-2$

(9) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2-x+2}=-\frac{1}{4}$

(10) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2+2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2}{x-1}=-2$

第２７回

(1) $\dfrac{3}{4}$　　(2) -6

(3) $-\dfrac{3}{2}$　　(4) -7

無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

(1) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x^2-(x+2)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{3}{4}$

(2) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{(3-\sqrt{x+8})(3+\sqrt{x+8})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{9-(x+8)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3+\sqrt{x+8})}{-(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\{-(3+\sqrt{x+8})\}=-6$

(3) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+3)-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=-\frac{3}{2}$

(4) (与式)

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{(-2x-\sqrt{3-x})(-2x+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}\times\frac{(\sqrt{x+5}+2)}{(-2x+\sqrt{3-x})}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-(3-x)}{(x+5)-4}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+2}{-2x+\sqrt{3-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(4x-3)}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+2}{-2x+\sqrt{3-x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{(4x-3)(\sqrt{x+5}+2)}{-2x+\sqrt{3-x}}$

$=-7$

第２８回

(1) $\dfrac{1}{3}$　　(2) 4

(3) 1　　(4) -4

無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

(1) (与式)

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x-\sqrt{4x-3})(x+\sqrt{4x-3})}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{x^2-(4x-3)}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+\sqrt{4x-3})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{3}$

(2) (与式)

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=4$

(3) (与式)

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2x^2-4}-x)(\sqrt{2x^2-4}+x)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(2x^2-4)-x^2}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-4}+x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{2x^2-4}+x}=1$

(4) (与式)

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x-\sqrt{4x-3})(x+\sqrt{4x-3})}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}\times\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(x+\sqrt{4x-3})}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x^2-(4x-3)}{(x+3)-4}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{x+\sqrt{4x-3}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{x+\sqrt{4x-3}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+2)}{x+\sqrt{4x-3}}$

$=-4$

第２９回

(1) ∞

(2) ∞

(3) $-\infty$

(4) ∞

(5) $-\infty$

(6) 0

(7) -3

(8) -2

右側極限　$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ 左側極限　$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$

解説

(1) (与式)$=\infty$

(2) (与式)$=\infty$

(3) (与式)$=-\infty$

(4) (与式)$=\infty$

(5) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x-1}{x(x-2)}=-\infty$

(6) (与式)$=0$

(7) $x\to-0$ であるから　$x<0$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{3x}{-x}=\lim_{x\to-0}(-3)=-3$

(8) $x\to1+0$ であるから　$x>1$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{2x(1-x)}{-(1-x)}$

$=\displaystyle\lim_{x\to1+0}(-2x)=-2$

第３０回

(1) ∞

(2) ∞

(3) $-\infty$

(4) $-\infty$

(5) $-\infty$

(6) 0

(7) $\dfrac{1}{4}$

(8) 1

右側極限　$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ 左側極限　$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$

解説

(1) (与式)$=\infty$

(2) (与式)$=\infty$

(3) (与式)$=-\infty$

(4) (与式)$=-\infty$

(5) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x+2}{-x(x-1)}=-\infty$

(6) (与式)$=0$

(7) $x\to+0$ であるから　$x>0$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{4x}$

$=\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(8) $x\to-2-0$ であるから　$x<-2$

よって　(与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x(x+2)}{-2(x+2)}$

$=\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$

第３１回

(1) 0

(2) 0

(3) 3

(4) 3

(5) 2

(6) $-\infty$

(7) $-\infty$

(8) ∞

(9) ∞

(10) ∞

多項式 … 最高次の項でくくり出す

解説

(1) (与式)$=0$

(2) (与式)$=0$

(3) (与式)$=3$

(4) (与式)$=1\cdot3=3$

(5) (与式)$=1\cdot2=2$

(6) (与式)$=-\infty$

(7) (与式)$=-\infty$

(8) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{6}{x}\right)=\infty$

(9) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-2\right)=\infty$

(10) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\infty$

第３２回

(1) 0

(2) 0

(3) 1

(4) 2

(5) 3

(6) ∞

(7) $-\infty$

(8) ∞

(9) ∞

(10) $-\infty$

多項式 … 最高次の項でくくり出す

解説

(1) (与式)$=0$

(2) (与式)$=0$

(3) (与式)$=1$

(4) (与式)$=2\cdot1=2$

(5) (与式)$=3\cdot1=3$

(6) (与式)$=\infty$

(7) (与式)$=-\infty$

(8) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{5}{x^2}\right)=\infty$

(9) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{3}{x^2}-1\right)=\infty$

(10) (与式)$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\left(-1-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

第３３回

(1)　0

(2)　0

(3)　3

(4)　$-\frac{1}{2}$

(5)　$-\infty$

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説

(1)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=0$

(2)　(与式)$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}=0$

(3)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=3$

(4)　(与式)$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$

(5)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-3+\frac{3}{x}}{-3+\frac{1}{x}}=-\infty$

第３４回

(1)　0

(2)　0

(3)　-2

(4)　$-\frac{1}{3}$

(5)　$-\infty$

分数式 … 分母の最高次の項で分母・分子を割る

解説

(1)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

(2)　(与式)$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}=0$

(3)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=-2$

(4)　(与式)$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{3}$

(5)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\infty$

第３５回

(1)　0

(2)　$\frac{1}{2}$

(3)　2

(4)　2

無理式 … 分母または分子を有理化する

解説

(1)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

(2)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2-\sqrt{x^2+3x})(x+2+\sqrt{x^2+3x})}{x+2+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-(x^2+3x)}{x+2+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x+2+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{2}$$

(3)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2}}{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2})}\times\frac{1}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2}}{(x^2+x)-(x^2-2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2}}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=2$$

(4)　$x=-t$ とおくと　$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

よって

(与式)

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}-\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t+1}+\sqrt{t^2+1}}{(t^2+t+1)-(t^2+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t+1}+\sqrt{t^2+1}}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)=2$$

別解

(与式)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}{(x^2-x+1)-(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2$$

第３６回

(1)　0

(2)　$\dfrac{1}{2}$

(3)　$\dfrac{2}{3}$

(4)　$-\dfrac{2}{3}$

> 無理式…分母または分子を有理化する

解説

(1)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$$

(2)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1-\sqrt{x^2-3x})(x-1+\sqrt{x^2-3x})}{x-1+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2-(x^2-3x)}{x-1+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{1}{2}$$

(3)　(与式)

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})}\times\frac{1}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+3x)-(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}{3x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$$

(4)　$x=-t$ とおくと　$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

よって

(与式)

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+4}-\sqrt{t^2+3t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+4}+\sqrt{t^2+3t+1}}{(t^2+4)-(t^2+3t+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+4}+\sqrt{t^2+3t+1}}{-3t+3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}}{-3+\frac{3}{t}}=-\frac{2}{3}$$

別解

(与式)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x+1}}{(x^2+4)-(x^2-3x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x+1}}{3x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{3}{x}}=-\frac{2}{3}$$

第３７回

(1)　∞　　(2)　0

(3)　∞　　(4)　∞

(5)　$-\infty$　　(6)　$-\infty$

(7)　∞　　(8)　∞

(9)　0　　(10)　2

$a>1$ のとき	$0<a<1$ のとき
$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$	$\lim_{x\to\infty}a^x=0$
$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$	$\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$
$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$	$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$
$\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$	$\lim_{x\to+0}\log_a x=\infty$

解説

(1)　(与式)$=\infty$

(2)　(与式)$=0$

(3)　(与式)$=\infty$

(4)　(与式)$=\infty$

(5)　(与式)$=-\infty$

(6)　(与式)$=-\infty$

(7)　(与式)$=\infty$

(8)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}=\infty$

(9)　(与式)$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^x}=0$

(10)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\log_3\dfrac{9x+1}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(9+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log_3 9=2$$

第３８回

(1)　0　　(2)　0

(3)　∞　　(4)　∞

(5)　$-\infty$　　(6)　$-\infty$

(7)　∞　　(8)　$-\infty$

(9)　∞　　(10)　2

$a>1$ のとき	$0<a<1$ のとき
$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$	$\lim_{x\to\infty}a^x=0$
$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$	$\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$
$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$	$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$
$\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$	$\lim_{x\to+0}\log_a x=\infty$

解説

(1)　(与式)$=0$

(2)　(与式)$=0$

(3)　(与式)$=\infty$

(4)　(与式)$=\infty$

(5)　(与式)$=-\infty$

(6)　(与式)$=-\infty$

(7)　(与式)$=\infty$

(8)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right\}=-\infty$

(9)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\infty$

(10)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\log_2\dfrac{4x^2+1}{x^2+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\log_2 4=2$$

第３９回

(1) 3　(2) $\frac{1}{4}$　(3) 2

(4) 0　(5) $-\frac{1}{2}$

> $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$
> （角の単位はラジアン）

解説

(1) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot1=3$

(2) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{4}$

$=1\cdot1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(3) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\sin 2x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot2\cos x$

$=1\cdot1\cdot2\cdot1=2$

(4) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\sin x(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x+1}=0$

(5) $x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\to\frac{\pi}{2}$ のとき　$t\to0$

よって

$(\text{与式})=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t}$

$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}\right)$

$=-\frac{1}{2}\cdot1=-\frac{1}{2}$

第４０回

(1) $\frac{4}{5}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) -1

(4) $\frac{1}{2}$　(5) -2

> $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$
> （角の単位はラジアン）

解説

(1) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{4}{5}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{5}\cdot1=\frac{4}{5}$

(2) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos x}$

$=1\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$

(3) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$

$=1\cdot1-2\cdot1=-1$

(4) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

別解　$(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(5) $x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\to\frac{\pi}{2}$ のとき　$t\to0$

よって

$(\text{与式})=\lim_{t\to0}2t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to0}2t\left(-\frac{1}{\tan t}\right)$

$=\lim_{t\to0}2\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cdot(-\cos t)=2\cdot1\cdot(-1)$

$=-2$

第４１回

(1) $-\infty$

(2) ∞

(3) $-\frac{1}{2}$

(4) 1

(5) 3

解説

(1) $(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^2}-1\right)=-\infty$

(2) $(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\infty$

(3) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2-(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{2}$

(4) $(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$=1$

(5) (与式)

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

第４２回

(1) 2

(2) $\frac{3}{2}$

(3) $\frac{5}{6}$

(4) ∞

(5) 2

解説

(1) $(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=2$

(2) $(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\{(n+2)-(n-1)\}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{2}$

(3) $(\text{与式})=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x+5}=\frac{5}{6}$

(4) $(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\infty$

(5) $(\text{与式})=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{\sin x}{x}\right)$

$=3\cdot1-1=2$

第４３回

(1) $7x^6$　(2) $-30x^5$

(3) $5x^4-6x^2$

(4) $10x^4+4x^3+18x^2+14x+8$

(5) $2x^5-5x^4+6x^3-12x^2-9$

(6) $-3x^{-4}$　(7) $20x^{-6}$

(8) $-\dfrac{7}{x^8}$　(9) $4x^3-\dfrac{3}{x^4}$

(10) $\dfrac{2x^3-6}{x^3}$

> $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n は整数)
> $\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

解説

(1) $y'=7x^6$

(2) $y'=-5\cdot 6x^5=-30x^5$

(3) $y'=5x^4-2\cdot 3x^2=5x^4-6x^2$

(4) $y'=2\cdot 5x^4+4x^3+6\cdot 3x^2+7\cdot 2x+8$
$=10x^4+4x^3+18x^2+14x+8$

(5) $y'=\dfrac{1}{3}\cdot 6x^5-5x^4+\dfrac{3}{2}\cdot 4x^3-4\cdot 3x^2-9$
$=2x^5-5x^4+6x^3-12x^2-9$

(6) $y'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}\left(=-\dfrac{3}{x^4}\right)$

(7) $y'=-4(-5x^{-5-1})=20x^{-6}\left(=\dfrac{20}{x^6}\right)$

(8) $y=\dfrac{1}{x^7}=x^{-7}$
よって　$y'=-7x^{-7-1}=-7x^{-8}=-\dfrac{7}{x^8}$

(9) $y=x^4+\dfrac{1}{x^3}=x^4+x^{-3}$
よって　$y'=4x^3-3x^{-3-1}=4x^3-3x^{-4}$
$=4x^3-\dfrac{3}{x^4}$

(10) $y=\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2}=2x-1+\dfrac{3}{x^2}$
$=2x-1+3x^{-2}$
よって　$y'=2+3(-2x^{-2-1})=2-6x^{-3}$
$=2-\dfrac{6}{x^3}=\dfrac{2x^3-6}{x^3}$

第４４回

(1) $8x^7$　(2) $15x^4$

(3) $-6x^5+12x^3$

(4) $-12x^3+6x^2+10x-7$

(5) $2x^4+2x^3-2x^2-2x$

(6) $4x^{-5}$　(7) $-35x^{-8}$

(8) $\dfrac{5}{x^6}$　(9) $12x^2+\dfrac{2}{x^3}$

(10) $\dfrac{-x^2+2x+6}{x^4}$

> $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n は整数)
> $\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

解説

(1) $y'=8x^7$

(2) $y'=3\cdot 5x^4=15x^4$

(3) $y'=-6x^5+3\cdot 4x^3=-6x^5+12x^3$

(4) $y'=-3\cdot 4x^3+2\cdot 3x^2+5\cdot 2x-7$
$=-12x^3+6x^2+10x-7$

(5) $y'=\dfrac{2}{5}\cdot 5x^4+\dfrac{1}{2}\cdot 4x^3-\dfrac{2}{3}\cdot 3x^2-2x$
$=2x^4+2x^3-2x^2-2x$

(6) $y'=-(-4x^{-4-1})=4x^{-5}\left(=\dfrac{4}{x^5}\right)$

(7) $y'=5(-7x^{-7-1})=-35x^{-8}\left(=-\dfrac{35}{x^8}\right)$

(8) $y=-\dfrac{1}{x^5}=-x^{-5}$
よって　$y'=-(-5x^{-5-1})=5x^{-6}=\dfrac{5}{x^6}$

(9) $y=4x^3-\dfrac{1}{x^2}=4x^3-x^{-2}$
よって　$y'=4\cdot 3x^2-(-2x^{-2-1})=12x^2+2x^{-3}$
$=12x^2+\dfrac{2}{x^3}$

(10) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^3}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$
$=x^{-1}-x^{-2}-2x^{-3}$
よって
$y'=-x^{-1-1}-(-2x^{-2-1})-2(-3x^{-3-1})$
$=-x^{-2}+2x^{-3}+6x^{-4}$
$=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}=\dfrac{-x^2+2x+6}{x^4}$

第４５回

(1) $6x^2-2x+8$

(2) $12x^3+45x^2+14x+5$

(3) $5x^4-3x^2-20$

(4) $5x^4+12x^3-3x^2-4x-3$

(5) $6x^5-5x^4-21x^2+22x-4$

> $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

解説

(1) $y'=(x^2+4)'(2x-1)+(x^2+4)(2x-1)'$
$=2x(2x-1)+(x^2+4)\cdot 2$
$=6x^2-2x+8$

(2) $y'=(3x^2+1)'(x^2+5x+2)$
$+(3x^2+1)(x^2+5x+2)'$
$=6x(x^2+5x+2)+(3x^2+1)(2x+5)$
$=12x^3+45x^2+14x+5$

(3) $y'=(x^3+4x)'(x^2-5)+(x^3+4x)(x^2-5)'$
$=(3x^2+4)(x^2-5)+(x^3+4x)\cdot 2x$
$=5x^4-3x^2-20$

(4) $y'=(x+1)'(x^4+2x^3-3x^2+x-4)$
$+(x+1)(x^4+2x^3-3x^2+x-4)'$
$=1\cdot(x^4+2x^3-3x^2+x-4)$
$+(x+1)(4x^3+6x^2-6x+1)$
$=5x^4+12x^3-3x^2-4x-3$

(5) $y'=(x^2-x)'(x^4-7x+4)$
$+(x^2-x)(x^4-7x+4)'$
$=(2x-1)(x^4-7x+4)+(x^2-x)(4x^3-7)$
$=6x^5-5x^4-21x^2+22x-4$

第４６回

(1) $9x^2+4x-9$

(2) $8x^3-18x^2+14x+3$

(3) $5x^4+9x^2-4$

(4) $10x^4-4x^3+30x^2-10x-6$

(5) $6x^5+5x^4-9x^2-4x+1$

> $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

解説

(1) $y'=(3x+2)'(x^2-3)+(3x+2)(x^2-3)'$
$=3\cdot(x^2-3)+(3x+2)\cdot 2x$
$=9x^2+4x-9$

(2) $y'=(2x^2-1)'(x^2-3x+4)$
$+(2x^2-1)(x^2-3x+4)'$
$=4x(x^2-3x+4)+(2x^2-1)(2x-3)$
$=8x^3-18x^2+14x+3$

(3) $y'=(x^3-x)'(x^2+4)+(x^3-x)(x^2+4)'$
$=(3x^2-1)(x^2+4)+(x^3-x)\cdot 2x$
$=5x^4+9x^2-4$

(4) $y'=(2x-1)'(x^4+5x^2-3)$
$+(2x-1)(x^4+5x^2-3)'$
$=2\cdot(x^4+5x^2-3)+(2x-1)(4x^3+10x)$
$=10x^4-4x^3+30x^2-10x-6$

(5) $y'=(x^2+x)'(x^4-3x+1)$
$+(x^2+x)(x^4-3x+1)'$
$=(2x+1)(x^4-3x+1)+(x^2+x)(4x^3-3)$
$=6x^5+5x^4-9x^2-4x+1$

第４７回

(1) $-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

(2) $-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{4x}{(x^2-5)^2}$

(3) $\dfrac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$

(4) $\dfrac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$

(5) $\dfrac{-3x^4+8x^2+15}{(x^4-8x^2+15)^2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

特に　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

解説

(1) $y'=-\dfrac{2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{(x+2)'}{(x+2)^2}-\dfrac{2(x^2-5)'}{(x^2-5)^2}$

$=-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{4x}{(x^2-5)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+2x-5)-(x-1)(x^2+2x-5)'}{(x^2+2x-5)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2+2x-5)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-5)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(x^2+1)'(x^3+1)-(x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$

$=\dfrac{2x(x^3+1)-(x^2+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$=\dfrac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$

(5) $y'=\dfrac{(x)'(x^4-8x^2+15)-x(x^4-8x^2+15)'}{(x^4-8x^2+15)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^4-8x^2+15)-x(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+15)^2}$

$=\dfrac{-3x^4+8x^2+15}{(x^4-8x^2+15)^2}$

第４８回

(1) $\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

(2) $-\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{6x}{(x^2-4)^2}$

(3) $\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(4) $\dfrac{-x^2-8x-2}{(x^2-2)^2}$

(5) $\dfrac{-4x^2+6x}{(4x^2-4x+3)^2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

特に　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

解説

(1) $y'=-\left\{-\dfrac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}\right\}=\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{(x-3)'}{(x-3)^2}-\left\{-\dfrac{3(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}\right\}$

$=-\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{6x}{(x^2-4)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(2x^2+x)'(x^2-2)-(2x^2+x)(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$

$=\dfrac{(4x+1)(x^2-2)-(2x^2+x)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$

$=\dfrac{-x^2-8x-2}{(x^2-2)^2}$

(5) $y'=\dfrac{(x^2)'(4x^2-4x+3)-x^2(4x^2-4x+3)'}{(4x^2-4x+3)^2}$

$=\dfrac{2x(4x^2-4x+3)-x^2(8x-4)}{(4x^2-4x+3)^2}$

$=\dfrac{-4x^2+6x}{(4x^2-4x+3)^2}$

第４９回

(1) $4(x-1)(x^2-2x+5)$

(2) $-4(3x^3+x+1)^3(9x^2+1)$

(3) $2(4x-3)(12x+1)$

(4) $-\dfrac{4(10x-1)}{(5x^2-x-1)^5}$

(5) $4\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

解説

(1) $y'=2(x^2-2x+5)(x^2-2x+5)'$

$=2(x^2-2x+5)(2x-2)$

$=4(x-1)(x^2-2x+5)$

(2) $y'=-4(3x^3+x+1)^3(3x^3+x+1)'$

$=-4(3x^3+x+1)^3(9x^2+1)$

(3) $y'=(2x+1)'(4x-3)^2+(2x+1)\{(4x-3)^2\}'$

$=2(4x-3)^2+(2x+1)\cdot 2(4x-3)(4x-3)'$

$=2(4x-3)^2+(2x+1)\cdot 2(4x-3)\cdot 4$

$=2(4x-3)\{(4x-3)+4(2x+1)\}$

$=2(4x-3)(12x+1)$

(4) $y=\dfrac{1}{(5x^2-x-1)^4}=(5x^2-x-1)^{-4}$

よって　$y'=-4(5x^2-x-1)^{-5}(5x^2-x-1)'$

$=-4(5x^2-x-1)^{-5}(10x-1)$

$=-\dfrac{4(10x-1)}{(5x^2-x-1)^5}$

(5) $y'=2\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)'$

$=2\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)\left(2x+\dfrac{2}{x^2}\right)$

$=4\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

第５０回

(1) $18x^2(x^3+4)$

(2) $20x(2x^2-1)^4$

(3) $2x(x^2+9)(3x^2+7)$

(4) $\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$

(5) $6\left(4x+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)$

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

解説

(1) $y'=3\cdot 2(x^3+4)(x^3+4)'$

$=6(x^3+4)\cdot 3x^2$

$=18x^2(x^3+4)$

(2) $y'=5(2x^2-1)^4(2x^2-1)'$

$=5(2x^2-1)^4\cdot 4x$

$=20x(2x^2-1)^4$

(3) $y'=(x^2-1)'(x^2+9)^2+(x^2-1)\{(x^2+9)^2\}'$

$=2x(x^2+9)^2+(x^2-1)\cdot 2(x^2+9)(x^2+9)'$

$=2x(x^2+9)^2+(x^2-1)\cdot 2(x^2+9)\cdot 2x$

$=2x(x^2+9)\{(x^2+9)+2(x^2-1)\}$

$=2x(x^2+9)(3x^2+7)$

(4) $y=-\dfrac{1}{(x^2+3)^3}=-(x^2+3)^{-3}$

よって　$y'=-\{-3(x^2+3)^{-4}(x^2+3)'\}$

$=3(x^2+3)^{-4}\cdot 2x$

$=\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$

(5) $y'=3\left(4x+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\left(4x+\dfrac{1}{x^2}\right)'$

$=3\left(4x+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\left(4-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$=6\left(4x+\dfrac{1}{x^2}\right)^2\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)$

第５１回

(1) $\frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}}$

(2) $-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

(3) $\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(4) $6x^{\frac{1}{2}}-5x^{-\frac{1}{6}}$

(5) $7x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{5x^2\cdot\sqrt[5]{x}}$

$(x^p)'=px^{p-1}$　(p は有理数)

解説

(1) $y'=\frac{4}{7}x^{\frac{4}{7}-1}$

$=\frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}}\ \left(=\frac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}\right)$

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}=x^{-\frac{3}{2}}$

よって　$y'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

$=-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}\ \left(=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\right)$

(3) $y=x\sqrt[4]{x}=x^{\frac{5}{4}}$

よって　$y'=\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$

$=\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(4) $y'=4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-6\cdot\frac{5}{6}x^{\frac{5}{6}-1}$

$=6x^{\frac{1}{2}}-5x^{-\frac{1}{6}}\ \left(=6\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt[6]{x}}\right)$

(5) $y=3x^2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x\sqrt[5]{x}}=3x^{\frac{7}{3}}-x^{-\frac{6}{5}}$

よって　$y'=3\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}-\left(-\frac{6}{5}x^{-\frac{6}{5}-1}\right)$

$=7x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{5}x^{-\frac{11}{5}}$

$=7x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{5x^2\cdot\sqrt[5]{x}}$

第５２回

(1) $-\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}$

(2) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(3) $\frac{7}{3}\sqrt[6]{x}$

(4) $4x^{\frac{1}{3}}+\frac{15}{8}x^{-\frac{5}{8}}$

(5) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{5}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$(x^p)'=px^{p-1}$　(p は有理数)

解説

(1) $y'=-\frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1}$

$=-\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}\ \left(=-\frac{6}{5}\sqrt[5]{x}\right)$

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

よって　$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\ \left(=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

(3) $y=2x\sqrt[6]{x}=2x^{\frac{7}{6}}$

よって　$y'=2\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1}$

$=\frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}\sqrt[6]{x}$

(4) $y'=3\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}+5\cdot\frac{3}{8}x^{\frac{3}{8}-1}$

$=4x^{\frac{1}{3}}+\frac{15}{8}x^{-\frac{5}{8}}\ \left(=4\sqrt[3]{x}+\frac{15}{8\sqrt[8]{x^5}}\right)$

(5) $y=x\sqrt{x}+\frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}}=x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{5}{3}}$

よって　$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}+3\left(-\frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}-1}\right)$

$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-5x^{-\frac{8}{3}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{5}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

第５３回

(1) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

(2) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

(3) $\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-2)^3}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$

(4) $\frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$

(5) $-\frac{12}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

解説

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+5}=(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}}$

よって　$y'=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}-1}(x^2-4x+5)'$

$=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x-4)$

$=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

よって　$y'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(1-x^2)'$

$=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$

$=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$\left(=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)$

別解　$y'=-\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}$

$=-\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y=\sqrt[4]{x^2-2}+\sqrt[3]{2x+3}$

$=(x^2-2)^{\frac{1}{4}}+(2x+3)^{\frac{1}{3}}$

よって　$y'=\frac{1}{4}(x^2-2)^{\frac{1}{4}-1}(x^2-2)'$

$+\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{1}{3}-1}(2x+3)'$

$=\frac{1}{4}(x^2-2)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2x+\frac{1}{3}(2x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2$

$=\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-2)^3}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$

(4) $y'=(x)'\sqrt{2x^2+1}+x(\sqrt{2x^2+1})'$

$=1\cdot\sqrt{2x^2+1}+x\cdot\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}$

$=\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}$

$=\frac{(2x^2+1)+2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}$

$=\frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$

(5) $y'=-\frac{(4x)'\sqrt{x^2+3}-4x(\sqrt{x^2+3})'}{(\sqrt{x^2+3})^2}$

$=-\frac{4\sqrt{x^2+3}-4x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$

$=-\frac{4(x^2+3)-4x^2}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$=-\frac{12}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

第54回

(1) $\dfrac{3x^2+2}{3\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}}$

(2) $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}}$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}-\dfrac{5x}{2\sqrt[4]{(5x^2-2)^3}}$

(4) $\dfrac{2x^2+x-5}{\sqrt{x^2-5}}$

(5) $\dfrac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$
$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

解説

(1) $y=\sqrt[3]{x^3+2x}=(x^3+2x)^{\frac{1}{3}}$

よって　$y'=\dfrac{1}{3}(x^3+2x)^{\frac{1}{3}-1}(x^3+2x)'$

$$=\frac{1}{3}(x^3+2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+2)$$

$$=\frac{3x^2+2}{3\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}}$$

(2) $y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}=-(3x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$

よって　$y'=-\left\{-\dfrac{1}{3}(3x^2+1)^{-\frac{1}{3}-1}(3x^2+1)'\right\}$

$$=\frac{1}{3}(3x^2+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot 6x$$

$$=\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}}$$

$$\left(=\frac{2x}{(3x^2+1)\sqrt[3]{3x^2+1}}\right)$$

別解　$y'=\dfrac{(\sqrt[3]{3x^2+1})'}{(\sqrt[3]{3x^2+1})^2}$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}\cdot 6x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}}$$

(3) $y=\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{5x^2-2}$

$$=(4x+1)^{\frac{1}{2}}-(5x^2-2)^{\frac{1}{4}}$$

よって

$$y'=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}-1}(4x+1)'-\frac{1}{4}(5x^2-2)^{\frac{1}{4}-1}(5x^2-2)'$$

$$=\frac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4-\frac{1}{4}(5x^2-2)^{-\frac{3}{4}}\cdot 10x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}-\frac{5x}{2\sqrt[4]{(5x^2-2)^3}}$$

(4) $y'=(x+1)'\sqrt{x^2-5}+(x+1)(\sqrt{x^2-5})'$

$$=1\cdot\sqrt{x^2-5}+(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}}$$

$$=\sqrt{x^2-5}+\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-5}}$$

$$=\frac{(x^2-5)+x(x+1)}{\sqrt{x^2-5}}$$

$$=\frac{2x^2+x-5}{\sqrt{x^2-5}}$$

(5) $y'=\dfrac{(x^2)'\sqrt{x^2-4}-x^2(\sqrt{x^2-4})'}{(\sqrt{x^2-4})^2}$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2-4}-x^2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^3}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

第55回

(1) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-12x}}$

(2) $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$　　(3) $-\dfrac{1}{x^2}$

(4) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$　　(5) x

両辺を y で微分して $\dfrac{dx}{dy}$ を求め，$\dfrac{dx}{dy}\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ を用いる

別解　y について解き，y を x で微分する

解説　(1) $x=-3y^2+y$ の両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=-6y+1$$

よって，$y\neq\dfrac{1}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-6y+1}\quad\cdots\cdots ①$$

$x=-3y^2+y$ から　$3y^2-y+x=0$

これを y について解くと　$y=\dfrac{1\pm\sqrt{1-12x}}{6}$

① に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{-(1\pm\sqrt{1-12x})+1}$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{1-12x}}$$

別解　$x=-3y^2+y$ を y について解くと

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-12x}}{6}$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1\pm\sqrt{1-12x}}{6}\right)'=\frac{1}{6}(1\pm\sqrt{1-12x})'$$

$$=\pm\frac{1}{6}\cdot\frac{-12}{2\sqrt{1-12x}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-12x}}$$

(2) $x=(2-y)^3+3$ の両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=-3(2-y)^2$$

よって，$y\neq 2$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{3(2-y)^2}\quad\cdots\cdots ①$$

$x=(2-y)^3+3$ から　$2-y=\sqrt[3]{x-3}$

① に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

別解　$x=(2-y)^3+3$ から　$2-y=\sqrt[3]{x-3}$

これを y について解くと　$y=2-\sqrt[3]{x-3}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=(2-\sqrt[3]{x-3})'=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

(3) $x=\dfrac{1}{y+1}$ の両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{(y+1)^2}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-(y+1)^2\quad\cdots\cdots ①$

$x=\dfrac{1}{y+1}$ から　$y+1=\dfrac{1}{x}$

① に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$

別解　$x=\dfrac{1}{y+1}$ を y について解くと　$y=\dfrac{1}{x}-1$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

(4) $x=\dfrac{2}{y^2}$ の両辺を y で微分すると　$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{4}{y^3}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{y^3}{4}\quad\cdots\cdots ①$

$x=\dfrac{2}{y^2}$ から　$y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{x}}$

① に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$

別解　$x=\dfrac{2}{y^2}$ を y について解くと　$y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{x}}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)'$

$$=\pm\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x\sqrt{x}}=\mp\frac{\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}$$

(5) $x=\sqrt{2y-1}$ の両辺を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{2\sqrt{2y-1}}=\frac{1}{\sqrt{2y-1}}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\sqrt{2y-1}=x$

別解　$x=\sqrt{2y-1}$ を y について解くと

$$y=\frac{1}{2}(x^2+1)$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left\{\dfrac{1}{2}(x^2+1)\right\}'=x$

第５６回

(1) $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(2) $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$　(3) $-\dfrac{5}{x^2}$

(4) $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}}$　(5) $\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

> 両辺を y で微分して $\dfrac{dx}{dy}$ を求め，$\dfrac{dx}{dy}\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ を用いる
>
> 別解　y について解き，y を x で微分する

解説　(1) $x=y^2-4y+3$ の両辺を y で微分すると

$\dfrac{dx}{dy}=2y-4$

よって，$y\neq 2$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y-4}$ ……①

$x=y^2-4y+3$ から　$y^2-4y+3-x=0$

これを y について解くと　$y=2\pm\sqrt{x+1}$

①に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(2\pm\sqrt{x+1})-4}$

$=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

別解　$x=y^2-4y+3$ を y について解くと

$y=2\pm\sqrt{x+1}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=(2\pm\sqrt{x+1})'=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(2) $x=(y+2)^2-3$ の両辺を y で微分すると

$\dfrac{dx}{dy}=2(y+2)$

よって，$y\neq -2$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2(y+2)}$ ……①

$x=(y+2)^2-3$ から　$y+2=\pm\sqrt{x+3}$

①に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

別解　$x=(y+2)^2-3$ から　$y+2=\pm\sqrt{x+3}$

これを y について解くと　$y=-2\pm\sqrt{x+3}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=(-2\pm\sqrt{x+3})'=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

(3) $x=\dfrac{5}{y-3}$ の両辺を y で微分すると

$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{5}{(y-3)^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{(y-3)^2}{5}$ ……①

$x=\dfrac{5}{y-3}$ から　$y-3=\dfrac{5}{x}$

①に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5}{x^2}$

別解　$x=\dfrac{5}{y-3}$ を y について解くと　$y=\dfrac{5}{x}+3$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{5}{x}+3\right)'=-\dfrac{5}{x^2}$

(4) $x=\dfrac{1}{3y^3}$ の両辺を y で微分すると　$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{y^4}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-y^4$ ……①

$x=\dfrac{1}{3y^3}$ から　$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

①に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}}\left(=-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{3x}}\right)$

別解　$x=\dfrac{1}{3y^3}$ を y について解くと　$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^4}}\left(=-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{3x}}\right)$

(5) $x=\sqrt{y^2+4}$ の両辺を y で微分すると

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+4}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+4}}$

よって，$y\neq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{y^2+4}}{y}$ ……①

$x=\sqrt{y^2+4}$ を y について解くと $y=\pm\sqrt{x^2-4}$

①に代入して　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

別解　$x=\sqrt{y^2+4}$ を y について解くと

$y=\pm\sqrt{x^2-4}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=(\pm\sqrt{x^2-4})'=\pm\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}$

$=\pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

第５７回

(1) $-2\sin x+3$

(2) $3\cos(3x+2)$

(3) $4\sin^3x\cos x$

(4) $-\dfrac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$

(5) $-\dfrac{2}{\sin^2x}$

(6) $2\sin 2x+4x\cos 2x$

(7) $3x^2\sin^2 4x+8x^3\sin 4x\cos 4x$

(8) $\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$

(9) $\dfrac{\cos x+2x\sin x}{\cos^3x}$

(10) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

> $(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$
>
> $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2x}$

解説

(1) $y'=-2\sin x+3$

(2) $y'=\cos(3x+2)\cdot(3x+2)'=3\cos(3x+2)$

(3) $y'=4\sin^3x\cdot(\sin x)'=4\sin^3x\cos x$

(4) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(\cos x)}\cdot(\cos x)'=-\dfrac{\sin x}{\cos^2(\cos x)}$

(5) $y'=-\dfrac{2(\tan x)'}{\tan^2x}=-\dfrac{2}{\tan^2x\cos^2x}$

$=-\dfrac{2}{\sin^2x}$

(6) $y'=2\cdot\sin 2x+2x\cdot\cos 2x\cdot 2$

$=2\sin 2x+4x\cos 2x$

$(=2(\sin 2x+2x\cos 2x))$

(7) $y'=3x^2\cdot\sin^2 4x+x^3\{2\sin 4x\cdot(\cos 4x)\cdot 4\}$

$=3x^2\sin^2 4x+8x^3\sin 4x\cos 4x$

$(=x^2\sin 4x(3\sin 4x+8x\cos 4x))$

(8) $y'=\cos x\cdot\cos 2x+\sin x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$

$=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$

(9) $y'=\dfrac{1\cdot\cos^2x-x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4x}$

$=\dfrac{\cos x+2x\sin x}{\cos^3x}$

(10) $y'=\dfrac{\cos x\cdot(1+\cos x)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}$

第５８回

(1) $\cos x+\dfrac{1}{\cos^2x}$　(2) $2\sin(1-2x)$

(3) $-6\sin x\cos^2x$　(4) $-\cos(\cos x)\cdot\sin x$

(5) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3x}$　(6) $3x^2\tan 3x+\dfrac{3x^3}{\cos^2 3x}$

(7) $3\cos^3 2x-18x\sin 2x\cos^2 2x$

(8) $-3\sin 3x\sin 5x+5\cos 3x\cos 5x$

(9) $\dfrac{2\sin x-4x\cos x}{\sin^3x}$　(10) $\dfrac{1}{1-\sin x}$

> $(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$
>
> $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2x}$

解説

(1) $y'=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2x}$

(2) $y'=-\sin(1-2x)\cdot(1-2x)'=2\sin(1-2x)$

(3) $y'=2\cdot 3\cos^2x\cdot(\cos x)'=-6\sin x\cos^2x$

(4) $y'=\cos(\cos x)\cdot(\cos x)'$

$=-\cos(\cos x)\cdot\sin x$

(5) $y'=-\dfrac{(\cos^2x)'}{\cos^4x}=-\dfrac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4x}$

$=\dfrac{2\sin x}{\cos^3x}$

(6) $y'=3x^2\cdot\tan 3x+x^3\cdot\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

$=3x^2\tan 3x+\dfrac{3x^3}{\cos^2 3x}$

$\left(=3x^2\left(\tan 3x+\dfrac{x}{\cos^2 3x}\right)\right)$

(7) $y'=3\cdot\cos^3 2x+3x\cdot\{3\cos^2 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\}$

$=3\cos^3 2x-18x\sin 2x\cos^2 2x$

$(=3\cos^2 2x(\cos 2x-6x\sin 2x))$

(8) $y'=-3\sin 3x\cdot\sin 5x+\cos 3x\cdot 5\cos 5x$

$=-3\sin 3x\sin 5x+5\cos 3x\cos 5x$

(9) $y'=\dfrac{2\cdot\sin^2x-2x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\sin^4x}$

$=\dfrac{2\sin x-4x\cos x}{\sin^3x}\left(=\dfrac{2(\sin x-2x\cos x)}{\sin^3x}\right)$

(10) $y'=\dfrac{-\sin x\cdot(1-\sin x)-\cos x\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1}{1-\sin x}$

第５９回

(1) $\dfrac{4x}{2x^2+3}$

(2) $\dfrac{3x^2}{x^3-2}$

(3) $3\log x+3-2x$

(4) $-\dfrac{6}{9x^2-1}$

(5) $\dfrac{4(\log x)^3}{x}$

(6) $\dfrac{1}{x\log 8}$

(7) $\log_a(2x+1)+\dfrac{2x}{(2x+1)\log a}$

(8) $-\dfrac{\log a}{x(\log x)^2}$

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$
$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

解説

(1) $y'=\dfrac{(2x^2+3)'}{2x^2+3}$
$=\dfrac{4x}{2x^2+3}$

(2) $y'=\dfrac{(x^3-2)'}{x^3-2}$
$=\dfrac{3x^2}{x^3-2}$

(3) $y'=3\log x+3x\cdot\dfrac{1}{x}-2x$
$=3\log x+3-2x$

(4) $y=\log|3x+1|-\log|3x-1|$　より
$y'=\dfrac{(3x+1)'}{3x+1}-\dfrac{(3x-1)'}{3x-1}$
$=\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{3}{3x-1}$
$=\dfrac{3(3x-1)-3(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)}$
$=-\dfrac{6}{9x^2-1}$

(5) $y'=4(\log x)^3\cdot(\log x)'$
$=\dfrac{4(\log x)^3}{x}$

(6) $y'=\dfrac{(9x)'}{9x\log 8}$
$=\dfrac{1}{x\log 8}$

(7) $y'=1\cdot\log_a(2x+1)+x\cdot\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\log a}$
$=\log_a(2x+1)+\dfrac{2x}{(2x+1)\log a}$

(8) $y=\dfrac{\log a}{\log x}$　より
$y'=-\dfrac{\log a}{(\log x)^2}\cdot(\log x)'$
$=-\dfrac{\log a}{x(\log x)^2}$

第６０回

(1) $\dfrac{9x^2}{3x^3+5}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

(3) $\dfrac{3(1-\log x)}{x^2}$

(4) $-\dfrac{4}{x^3-2x}$

(5) $\dfrac{\log 2x}{2x}$

(6) $\dfrac{2}{x\log 7}$

(7) $\log_a x^3+\dfrac{3}{\log a}$

(8) $\dfrac{\log 2a}{x(\log x)^2}$

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$
$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

解説

(1) $y'=\dfrac{(3x^3+5)'}{3x^3+5}$
$=\dfrac{9x^2}{3x^3+5}$

(2) $y'=\dfrac{(x^2-x-1)'}{x^2-x-1}$
$=\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

(3) $y'=\dfrac{3}{x^2}\log x+\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$
$=\dfrac{3(1-\log x)}{x^2}$

(4) $y=\log|x^2|-\log|x^2-2|$　より
$y'=\dfrac{(x^2)'}{x^2}-\dfrac{(x^2-2)'}{x^2-2}$
$=\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2-2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2-2}$
$=\dfrac{2(x^2-2)-2x\cdot x}{x(x^2-2)}$
$=-\dfrac{4}{x^3-2x}$

(5) $y'=\dfrac{1}{4}\cdot 2(\log 2x)\cdot(\log 2x)'$
$=\dfrac{1}{2}(\log 2x)\cdot\dfrac{(2x)'}{2x}$
$=\dfrac{\log 2x}{2x}$

(6) $y'=\dfrac{(2x^2)'}{2x^2\log 7}$
$=\dfrac{2}{x\log 7}$

(7) $y'=1\cdot\log_a x^3+x\cdot\dfrac{(x^3)'}{x^3\log a}$
$=\log_a x^3+\dfrac{3}{\log a}$

(8) $y=\dfrac{\log 2a}{\log x}$　より
$y'=-\dfrac{\log 2a}{(\log x)^2}\cdot(\log x)'$
$=-\dfrac{\log 2a}{x(\log x)^2}$

第６１回

(1) $5e^{5x}$

(2) $-3x^2e^{-x^3+1}$

(3) $3\cdot 6^{3x}\log 6$

(4) $\dfrac{3^{\log x}\log 3}{x}$

(5) $x(3x+2)e^{3x}$

(6) $-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

(7) $-\dfrac{e^x+e^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}$

(8) $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\log a$

解説

(1) $y'=e^{5x}\cdot(5x)'=5e^{5x}$

(2) $y'=e^{-x^3+1}\cdot(-x^3+1)'$
$=-3x^2e^{-x^3+1}$

(3) $y'=6^{3x}\log 6\cdot(3x)'$
$=3\cdot 6^{3x}\log 6$

(4) $y'=3^{\log x}\log 3\cdot(\log x)'$
$=\dfrac{3^{\log x}\log 3}{x}$

(5) $y'=2xe^{3x}+x^2\cdot 3e^{3x}$
$=x(3x+2)e^{3x}$

(6) $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$
$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

(7) $y'=-\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})^2}$
$=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}$

(8) $y'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$
$=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

第６２回

(1) $-3e^{-3x}$

(2) $4xe^{2x^2}$

(3) $2x\cdot 5^{x^2+1}\log 5$

(4) $-(\log 10)10^{\cos x}\sin x$

(5) $(3x+4)e^x$

(6) $e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

(7) $-\dfrac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$

(8) $-\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$

$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\log a$

解説

(1) $y'=e^{-3x}\cdot(-3x)'=-3e^{-3x}$

(2) $y'=e^{2x^2}\cdot(2x^2)'=4xe^{2x^2}$

(3) $y'=5^{x^2+1}\log 5\cdot(x^2+1)'$
$=2x\cdot 5^{x^2+1}\log 5$

(4) $y'=10^{\cos x}\log 10\cdot(\cos x)'$
$=-(\log 10)10^{\cos x}\sin x$

(5) $y'=3e^x+(3x+1)e^x=(3x+4)e^x$

(6) $y'=2e^{2x}\cos x+e^{2x}(-\sin x)$
$=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

(7) $y'=-\dfrac{(e^{2x}+e^{-2x})'}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$
$=-\dfrac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$
$=-\dfrac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}$

(8) $y'=\dfrac{(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})^2}$
$=\dfrac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$
$=-\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$

第６３回

(1) $5\cos^4 x\cos 6x$　　(2) $\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\cos 2x$

(3) $-\dfrac{(2x+1)\sin\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2-1}$　　(5) $\dfrac{x}{x-1}$

三角関数の公式，対数の性質を利用する

解説

(1) $y'=5\cos^4 x(-\sin x)\sin 5x+\cos^5 x\cdot 5\cos 5x$
$=5\cos^4 x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)$
$=5\cos^4 x\cos 6x$

(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)^3=\dfrac{1}{8}\sin^3 2x$

よって

$y'=\dfrac{1}{8}\cdot 3\sin^2 2x(\sin 2x)'=\dfrac{3}{8}\sin^2 2x\cdot 2\cos 2x$
$=\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\cos 2x\ \left(=\dfrac{3}{8}\sin 4x\sin 2x\right)$

別解　$y=\sin^3 x\cos^3 x$

よって　$y'=3\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\cos^3 x$
$+\sin^3 x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$
$=3\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)$
$\left(=\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\cos 2x=\dfrac{3}{8}\sin 4x\sin 2x\right)$

(3) $y'=-\sin\sqrt{x^2+x+1}\cdot(\sqrt{x^2+x+1})'$
$=-\sin\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
$=-\dfrac{(2x+1)\sin\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(4) $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{2}\{\log(1-x)-\log(1+x)\}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(1-x)'}{1-x}-\dfrac{(1+x)'}{1+x}\right\}$
$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$
$=-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right\}=\dfrac{1}{x^2-1}$

(5) $y=\log e^x+\log(1-x)=x+\log(1-x)$

よって　$y'=1+\dfrac{(1-x)'}{1-x}=1-\dfrac{1}{1-x}$
$=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$

第６４回

(1) $3\cos^2 x\cos 4x$　　(2) $-8\sin 2x\cos 2x$

(3) $-\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

(4) $\dfrac{4}{x^2-1}$　　(5) $\dfrac{3x^2-4}{x^3-2x}$

三角関数の公式，対数の性質を利用する

解説

(1) $y'=3\cos^2 x(-\sin x)\sin 3x+\cos^3 x\cdot 3\cos 3x$
$=3\cos^2 x(\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x)$
$=3\cos^2 x\cos 4x$

(2) $y=2(\cos^2 x-\sin^2 x)^2=2\cos^2 2x$

よって

$y'=2\cdot 2\cos 2x\cdot(\cos 2x)'$
$=4\cos 2x\cdot(-2\sin 2x)$
$=-8\sin 2x\cos 2x$
$(=-4\sin 4x)$

(3) $y'=\dfrac{(1+\cos^2 x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}=\dfrac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}$
$=-\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\ \left(=-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)$

(4) $y=2(\log|x-1|-\log|x+1|)$

よって

$y'=2\left\{\dfrac{(x-1)'}{x-1}-\dfrac{(x+1)'}{x+1}\right\}$
$=2\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$
$=2\left\{\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right\}$
$=\dfrac{4}{x^2-1}$

(5) $y=\log x^2+\log\sqrt{x^2-2}$
$=2\log|x|+\dfrac{1}{2}\log(x^2-2)$

よって

$y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^2-2)'}{x^2-2}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{x^2-2}$
$=\dfrac{2(x^2-2)+x\cdot x}{x(x^2-2)}=\dfrac{3x^2-4}{x^3-2x}$

第６５回

(1) e^3

(2) $\dfrac{1}{e}$

(3) $\dfrac{1}{e^2}$

(4) 5

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

解説

(1) $3x=t$ とおくと　$x\to 0$ のとき　$t\to 0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$$

(2) $-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき　$t\to -0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to -0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to -0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(3) $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}$

$\dfrac{2}{x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき　$t\to +0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to +0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{2}{t}}}=\lim_{t\to +0}\frac{1}{\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{e^2}$$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to 0}\log(1+5x)^{\frac{1}{x}}$

$5x=t$ とおくと　$x\to 0$ のとき　$t\to 0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{5}{t}}=\lim_{t\to 0}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^5$$
$$=\log e^5=5$$

第６６回

(1) $\sqrt{e}$

(2) $\dfrac{1}{e^3}$

(3) e

(4) -1

$$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

解説

(1) $\dfrac{1}{2x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき　$t\to +0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to +0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}=\lim_{t\to +0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

(2) $-\dfrac{3}{x}=t$ とおくと　$x\to -\infty$ のとき　$t\to +0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to +0}(1+t)^{-\frac{3}{t}}=\lim_{t\to +0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-3}$$
$$=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

(3) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

$-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき　$t\to -0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to -0}\frac{1}{(1+t)^{-\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to -0}\frac{1}{\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}}$$
$$=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\lim_{x\to 0}\log(1-x)^{\frac{1}{x}}$

$-x=t$ とおくと　$x\to 0$ のとき　$t\to 0$
よって

$$(\text{与式})=\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}$$
$$=\log e^{-1}=-1$$

第６７回

(1) $t-2$　　(2) $-2\sqrt{1-t^2}$

(3) $\dfrac{t^2-2t-1}{2t}$　　(4) $-\dfrac{1}{\tan t}$

(5) $-2\sin 2t\cos^2 2t$

$x=f(t)$，$y=g(t)$（t は媒介変数）のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t-4$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-4}{2}=t-2$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot(1+t^2)-t^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-1\cdot(1+t^2)-(1-t)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{t^2-2t-1}{2t}$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1\cdot\cos t-t\cdot\sin t-\cos t=-t\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=1\cdot\sin t+t\cdot\cos t-\sin t=t\cos t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{-t\sin t}=-\dfrac{1}{\tan t}$

(5) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{\cos^2 2t}$

$\dfrac{dy}{dt}=2\cdot(-2\sin 2t)=-4\sin 2t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4\sin 2t}{\dfrac{2}{\cos^2 2t}}=-2\sin 2t\cos^2 2t$

$(=-\sin 4t\cos 2t)$

第６８回

(1) $\dfrac{2t+1}{3t^2}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{t}{2t-1}}$

(3) $-\dfrac{1}{t^2+1}$　　(4) $-\dfrac{2\cos 2t}{1+\sin t}$

(5) $-\dfrac{5}{2}\tan t$

$x=f(t)$，$y=g(t)$（t は媒介変数）のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t+1$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+1}{3t^2}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{2\sqrt{2t-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2t-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=\sqrt{\dfrac{t}{2t-1}}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot t-(t^2-1)\cdot 1}{t^2}=\dfrac{t^2+1}{t^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-1\cdot t-(1-t)\cdot 1}{t^2}=-\dfrac{1}{t^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t^2+1}{t^2}}=-\dfrac{1}{t^2+1}$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1+\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=-2\cos 2t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\cos 2t}{1+\sin t}$

(5) $\dfrac{dx}{dt}=2\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-6\sin t\cos^2 t$

$\dfrac{dy}{dt}=5\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t=15\sin^2 t\cos t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15\sin^2 t\cos t}{-6\sin t\cos^2 t}$

$$=-\frac{5\sin t}{2\cos t}=-\frac{5}{2}\tan t$$

第６９回

(1) $-\dfrac{x}{y}$

(2) $-\dfrac{x+y}{x-y}$

(3) $\dfrac{x-1}{y+1}$

(4) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(5) $\dfrac{1}{2\cos 2y}$

> $F(x,\ y)=0$ で定められる関数の導関数
> 両辺を x で微分して，$\dfrac{dy}{dx}$ を求める
> $$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

解説

(1) 両辺を x について微分すると

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(2) 両辺を x について微分すると

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$x-y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+y}{x-y}$

(3) 両辺を x について微分すると

$$2(y+1)\frac{dy}{dx}=2x-2$$

よって，$y+1\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-1}{y+1}$

(4) 両辺を x について微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$x\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(5) 両辺を x について微分すると

$$1=2\cos 2y\frac{dy}{dx}$$

よって，$\cos 2y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\cos 2y}$

第７０回

(1) $\dfrac{x}{9y}$

(2) $\dfrac{x-3y}{3x+y}$

(3) $\dfrac{3x^2+6x}{2y}$

(4) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

(5) $-\sin^2 y$

> $F(x,\ y)=0$ で定められる関数の導関数
> 両辺を x で微分して，$\dfrac{dy}{dx}$ を求める
> $$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

解説

(1) 両辺を x について微分すると

$$\frac{2}{9}x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{9y}$

(2) 両辺を x について微分すると

$$2x-6y-6x\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$3x+y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-3y}{3x+y}$

(3) 両辺を x について微分すると

$$2y\frac{dy}{dx}=3x^2+6x$$

よって，$y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+6x}{2y}$

(4) 両辺を x について微分すると

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$x\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

(5) 両辺を x について微分すると

$$1=-\frac{1}{\tan^2 y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=-\sin^2 y$

第７１回

(1) $-\dfrac{2x}{(2x-1)^3}$

(2) $4\sin 2x\cos 2x+\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

(3) $2(x\log x-1)(\log x+1)$

(4) $-6x\cdot 5^{-3x^2}\log 5$

(5) $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

解説

(1)
$$y'=\frac{2x\cdot(2x-1)^2-x^2\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}$$
$$=\frac{2x\{(2x-1)-2x\}}{(2x-1)^3}$$
$$=-\frac{2x}{(2x-1)^3}$$

(2)
$$y'=2\sin 2x\cdot 2\cos 2x+\frac{3}{\cos^2 3x}$$
$$=4\sin 2x\cos 2x+\frac{3}{\cos^2 3x}$$
$$\left(=2\sin 4x+\frac{3}{\cos^2 3x}\right)$$

(3)
$$y'=2(x\log x-1)(x\log x-1)'$$
$$=2(x\log x-1)\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$=2(x\log x-1)(\log x+1)$$

(4)
$$y'=5^{-3x^2}\cdot\log 5\cdot(-3x^2)'$$
$$=-6x\cdot 5^{-3x^2}\log 5$$

(5)
$$\frac{dx}{dt}=\frac{1\cdot(1+t^3)-t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t\cdot(1+t^3)-t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

よって
$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

第７２回

(1) $\dfrac{10x^2+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$

(2) $\dfrac{\cos x+3x\sin x}{\cos^4 x}$

(3) $-\tan x$

(4) $2(x\log x-x+1)\log x$

(5) $-\dfrac{25x}{9y}$

解説

(1)
$$y'=1\cdot\sqrt[3]{2x^2+1}+x\cdot\frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$$
$$=\frac{3(2x^2+1)+4x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$$
$$=\frac{10x^2+3}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$$

(2)
$$y'=\frac{1\cdot\cos^3 x-x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x}$$
$$=\frac{\cos x+3x\sin x}{\cos^4 x}$$

(3)
$$y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

(4)
$$y'=2(x\log x-x+1)(x\log x-x+1)'$$
$$=2(x\log x-x+1)\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1\right)$$
$$=2(x\log x-x+1)\log x$$

(5) 両辺を x について微分すると

$$\frac{2}{9}x+\frac{2}{25}y\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{25x}{9y}$

第７３回　以下，Cは積分定数とする。

(1) $\frac{3}{5}x^5+C$

(2) $-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $6\log|x|+C$

(4) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$

(5) $y^7+\frac{1}{y}+y+C$

(6) $\frac{2}{3}x^3-4x+3\log|x|+C$

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$
$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

解説

(1) (与式)$=3\cdot\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{3}{5}x^5+C$

(2) (与式)$=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$
$=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) (与式)$=6\log|x|+C$

(4) (与式)$=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$

(5) (与式)$=\int(7y^6-y^{-2}+1)dy$
$=7\cdot\frac{1}{6+1}y^{6+1}-\frac{1}{-2+1}y^{-2+1}+y+C$
$=y^7+y^{-1}+y+C$
$=y^7+\frac{1}{y}+y+C$

(6) (与式)$=\int\left(2x^2-4+\frac{3}{x}\right)dx$
$=2\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}-4x+3\log|x|+C$
$=\frac{2}{3}x^3-4x+3\log|x|+C$

第７４回

(1) $\frac{2}{7}x^7+C$

(2) $-\frac{5}{x}+C$

(3) $3\log|x|+C$

(4) $14\sqrt[7]{x^3}+C$

(5) $\frac{4}{3}y^6+\frac{2}{y^2}-y+C$

(6) $\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+2\log|x|+C$

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$
$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

解説

(1) (与式)$=2\cdot\frac{1}{6+1}x^{6+1}+C=\frac{2}{7}x^7+C$

(2) (与式)$=\int 5x^{-2}dx=5\cdot\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$
$=-5x^{-1}+C$
$=-\frac{5}{x}+C$

(3) (与式)$=3\log|x|+C$

(4) (与式)$=\int 6x^{-\frac{4}{7}}dx$
$=6\cdot\frac{1}{-\frac{4}{7}+1}x^{-\frac{4}{7}+1}+C$
$=14x^{\frac{3}{7}}+C$
$=14\sqrt[7]{x^3}+C$

(5) (与式)$=\int(8y^5-4y^{-3}-1)dy$
$=8\cdot\frac{1}{5+1}y^{5+1}-4\cdot\frac{1}{-3+1}y^{-3+1}-y+C$
$=\frac{4}{3}y^6+2y^{-2}-y+C$
$=\frac{4}{3}y^6+\frac{2}{y^2}-y+C$

(6) (与式)$=\int\left(x^3-5x+\frac{2}{x}\right)dx$
$=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-5\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}+2\log|x|+C$
$=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+2\log|x|+C$

第７５回

(1) $\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[4]{x}+C$

(2) $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

(3) $x-4\sqrt{x}+\log|x|+C$

(4) $y-4\log|y|-\frac{4}{y}+C$

(5) $t-12\sqrt{t}+9\log|t|+C$

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$
$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

解説

(1) (与式)$=\int\left(x^{\frac{3}{5}}+x^{-\frac{3}{4}}\right)dx$
$=\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+4x^{\frac{1}{4}}+C=\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[4]{x}+C$

(2) (与式)$=\int x^{\frac{5}{3}}dx=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C=\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$

(3) (与式)$=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$
$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx=x-4x^{\frac{1}{2}}+\log|x|+C$
$=x-4\sqrt{x}+\log|x|+C$
$(=x-4\sqrt{x}+\log x+C)$

注　被積分関数の形から$x>0$であり，$\log|x|=\log x$となる。

(4) (与式)$=\int\left(1-\frac{2}{y}\right)^2dy$
$=\int\left(1-\frac{4}{y}+\frac{4}{y^2}\right)dy=\int\left(1-\frac{4}{y}+4y^{-2}\right)dy$
$=y-4\log|y|-4y^{-1}+C=y-4\log|y|-\frac{4}{y}+C$

(5) (与式)$=\int\frac{t-6\sqrt{t}+9}{t}dt$
$=\int\left(1-6t^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{t}\right)dt$
$=t-12t^{\frac{1}{2}}+9\log|t|+C$
$=t-12\sqrt{t}+9\log|t|+C$
$(=t-12\sqrt{t}+9\log t+C)$

注　被積分関数の形から$t>0$であり，$\log|t|=\log t$となる。

第７６回

(1) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$

(2) $\frac{5}{18}x^3\sqrt[5]{x^3}+C$

(3) $4\log|y|-8\sqrt{y}+y+C$

(4) $-\frac{9}{x}-6\log|x|+x+C$

(5) $u-16\sqrt{u}+16\log|u|+C$

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$
$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

解説

(1) (与式)$=\int\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$
$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$

(2) (与式)$=\int x^{\frac{13}{5}}dx=\frac{5}{18}x^{\frac{18}{5}}+C=\frac{5}{18}x^3\sqrt[5]{x^3}+C$

(3) (与式)$=\int\left(\frac{4}{y}-\frac{4}{\sqrt{y}}+1\right)dy$
$=\int\left(\frac{4}{y}-4y^{-\frac{1}{2}}+1\right)dy=4\log|y|-8y^{\frac{1}{2}}+y+C$
$=4\log|y|-8\sqrt{y}+y+C$
$(=4\log y-8\sqrt{y}+y+C)$

注　被積分関数の形から$y>0$であり，$\log|y|=\log y$となる。

(4) (与式)$=\int\left(\frac{3}{x}-1\right)^2dx=\int\left(\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}+1\right)dx$
$=\int\left(9x^{-2}-\frac{6}{x}+1\right)dx$
$=-9x^{-1}-6\log|x|+x+C$
$=-\frac{9}{x}-6\log|x|+x+C$

(5) (与式)$=\int\frac{u-8\sqrt{u}+16}{u}du$
$=\int\left(1-8u^{-\frac{1}{2}}+\frac{16}{u}\right)du$
$=u-16u^{\frac{1}{2}}+16\log|u|+C$
$=u-16\sqrt{u}+16\log|u|+C$
$(=u-16\sqrt{u}+16\log u+C)$

注　被積分関数の形から$u>0$であり，$\log|u|=\log u$となる。

第７７回

(1) $-\cos x+C$
(2) $2\sin x+C$
(3) $4\tan x+C$
(4) $-\dfrac{1}{\tan x}+C$
(5) $-3\cos x+2\sin x+C$
(6) $3\tan x-4\sin x+C$
(7) $\tan x-x+C$
(8) $-\cos x+\sin x+C$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$
$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$$

解説

(1) (与式)$=-\cos x+C$

(2) (与式)$=2\sin x+C$

(3) (与式)$=4\tan x+C$

(4) (与式)$=-\dfrac{1}{\tan x}+C$

(5) (与式)$=-3\cos x+2\sin x+C$

(6) (与式)$=3\tan x-4\sin x+C$

(7) (与式)$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$
$=\tan x-x+C$

(8) (与式)$=\displaystyle\int\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin x\,dx$
$=\displaystyle\int(\sin x+\cos x)dx$
$=-\cos x+\sin x+C$

第７８回

(1) $-3\cos x+C$
(2) $\sin x+C$
(3) $2\tan x+C$
(4) $-\dfrac{3}{\tan x}+C$
(5) $-2\cos x+3\sin x+C$
(6) $5\tan x+2\sin x+C$
(7) $\sin x+\cos x+C$
(8) $\tan x+C$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$
$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$$

解説

(1) (与式)$=-3\cos x+C$

(2) (与式)$=\sin x+C$

(3) (与式)$=2\tan x+C$

(4) (与式)$=-\dfrac{3}{\tan x}+C$

(5) (与式)$=-2\cos x+3\sin x+C$

(6) (与式)$=5\tan x+2\sin x+C$

(7) (与式)$=\displaystyle\int\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x\,dx$
$=\displaystyle\int(\cos x-\sin x)dx$
$=\sin x+\cos x+C$

(8) (与式)$=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x\cos x}dx$
$=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x}$
$=\tan x+C$

第７９回

(1) $4e^x+C$　(2) $\dfrac{3^x}{\log 3}+C$
(3) $-\dfrac{1}{7^x\log 7}+C$　(4) $\dfrac{2^x}{\log 2}-e^x+C$
(5) $e^{x+3}+C$　(6) $e^{x+4}+\dfrac{5^{x+1}}{\log 5}+C$
(7) e^x-x+C　(8) $\log|x|+\dfrac{2^x}{\log 2}+C$

$$\int e^x dx=e^x+C$$
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C\qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

解説

(1) (与式)$=4e^x+C$

(2) (与式)$=\dfrac{3^x}{\log 3}+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{7}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\log\frac{1}{7}}+C$
$=-\dfrac{1}{7^x\log 7}+C$

(4) (与式)$=\dfrac{2^x}{\log 2}-e^x+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int e^3\cdot e^x dx=e^3\cdot e^x+C=e^{x+3}+C$

(6) (与式)$=\displaystyle\int(e^4\cdot e^x+5\cdot 5^x)dx$
$=e^4\cdot e^x+5\cdot\dfrac{5^x}{\log 5}+C$
$=e^{x+4}+\dfrac{5^{x+1}}{\log 5}+C$

(7) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$
$=\displaystyle\int(e^x-1)dx$
$=e^x-x+C$

(8) (与式)$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+2^x\right)dx=\log|x|+\frac{2^x}{\log 2}+C$

第８０回

(1) $5e^x+C$　(2) $\dfrac{2^x}{\log 2}+C$
(3) $-\dfrac{1}{5^x\log 5}+C$　(4) $\dfrac{7^x}{\log 7}+e^x+C$
(5) $e^{x+5}+C$　(6) $e^{x+1}-\dfrac{3^{x+2}}{\log 3}+C$
(7) $x+e^x+C$　(8) $\dfrac{3^x}{\log 3}-\log|x|+C$

$$\int e^x dx=e^x+C$$
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C\qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

解説

(1) (与式)$=5e^x+C$

(2) (与式)$=\dfrac{2^x}{\log 2}+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\log\frac{1}{5}}+C$
$=-\dfrac{1}{5^x\log 5}+C$

(4) (与式)$=\dfrac{7^x}{\log 7}+e^x+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int e^5\cdot e^x dx=e^5\cdot e^x+C=e^{x+5}+C$

(6) (与式)$=\displaystyle\int(e\cdot e^x-3^2\cdot 3^x)dx$
$=e\cdot e^x-3^2\cdot\dfrac{3^x}{\log 3}+C$
$=e^{x+1}-\dfrac{3^{x+2}}{\log 3}+C$

(7) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(1+e^x)(1-e^x)}{1-e^x}dx$
$=\displaystyle\int(1+e^x)dx$
$=x+e^x+C$

(8) (与式)$=\displaystyle\int\left(3^x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3^x}{\log 3}-\log|x|+C$

第８１回

(1) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$

(2) $\frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7+C$

(3) $-\frac{1}{54}(1-6x)^9+C$

(4) $-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$

(5) $\frac{3}{16}(4x+5)\sqrt[3]{4x+5}+C$

(6) $\frac{5}{3}\log|3x+1|+C$

(7) $-\frac{1}{4}\cos(4x-3)+C$

(8) $\frac{1}{3}\tan 3x+C$

(9) $\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

(10) $\frac{3^{2x+1}}{2\log 3}+C$

> $\int f(x)dx=F(x)+C$，$a\neq 0$ のとき
>
> $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

解説

(1) $(与式)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x-1)^4+C$

$=\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$

(2) $(与式)=5\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7+C$

$=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}x+2\right)^7+C$

(3) $(与式)=\frac{1}{-6}\cdot\frac{1}{9}(1-6x)^9+C$

$=-\frac{1}{54}(1-6x)^9+C$

(4) $(与式)=\int(x+1)^{-3}dx$

$=\frac{1}{-2}(x+1)^{-2}+C$

$=-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$

(5) $(与式)=\int(4x+5)^{\frac{1}{3}}dx$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}(4x+5)^{\frac{4}{3}}+C$

$=\frac{3}{16}(4x+5)\sqrt[3]{4x+5}+C$

(6) $(与式)=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\log|3x+1|+C$

$=\frac{5}{3}\log|3x+1|+C$

(7) $(与式)=\frac{1}{4}\cdot\{-\cos(4x-3)\}+C$

$=-\frac{1}{4}\cos(4x-3)+C$

(8) $(与式)=\frac{1}{3}\tan 3x+C$

(9) $(与式)=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

(10) $(与式)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2x+1}}{\log 3}+C$

$=\frac{3^{2x+1}}{2\log 3}+C$

第８２回

(1) $\frac{1}{25}(5x+1)^5+C$

(2) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6+C$

(3) $-\frac{1}{21}(5-3x)^7+C$

(4) $-\frac{1}{8(2x-7)^4}+C$

(5) $\frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1}+C$

(6) $\frac{1}{2}\log|4x-1|+C$

(7) $\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

(8) $\frac{1}{5}\tan(5x+2)+C$

(9) $4e^{\frac{1}{4}x+2}+C$

(10) $\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}+C$

> $\int f(x)dx=F(x)+C$，$a\neq 0$ のとき
>
> $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

解説

(1) $(与式)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}(5x+1)^5+C$

$=\frac{1}{25}(5x+1)^5+C$

(2) $(与式)=2\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6+C$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6+C$

(3) $(与式)=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{7}(5-3x)^7+C$

$=-\frac{1}{21}(5-3x)^7+C$

(4) $(与式)=\int(2x-7)^{-5}dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-4}(2x-7)^{-4}+C$

$=-\frac{1}{8(2x-7)^4}+C$

(5) $(与式)=\int(x+1)^{\frac{1}{4}}dx$

$=\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{4}}+C$

$=\frac{4}{5}(x+1)\sqrt[4]{x+1}+C$

(6) $(与式)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\log|4x-1|+C$

$=\frac{1}{2}\log|4x-1|+C$

(7) $(与式)=\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

(8) $(与式)=\frac{1}{5}\tan(5x+2)+C$

(9) $(与式)=4e^{\frac{1}{4}x+2}+C$

(10) $(与式)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2x-1}}{\log 5}+C$

$=\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}+C$

第８３回

(1) $\dfrac{1}{20}(x+2)^4(8x+1)+C$

(2) $\log|x-1|-\dfrac{1}{x-1}+C$

(3) $-\dfrac{3x-1}{3(2x-3)^3}+C$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし} \quad x=g(t)$$

解説

(1) $x+2=t$ とおくと　$x=t-2,\ dx=dt$

よって

$$(与式)=\int\{2(t-2)+1\}t^3dt$$
$$=\int(2t-3)t^3dt=\int(2t^4-3t^3)dt$$
$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+C=\frac{1}{20}t^4(8t-15)+C$$
$$=\frac{1}{20}(x+2)^4\{8(x+2)-15\}+C$$
$$=\frac{1}{20}(x+2)^4(8x+1)+C$$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x=t+1,\ dx=dt$

よって

$$(与式)=\int\frac{t+1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\log|t|-\frac{1}{t}+C$$
$$=\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

(3) $2x-3=t$ とおくと　$x=\dfrac{t+3}{2},\ dx=\dfrac{1}{2}dt$

よって

$$(与式)=\int\left(4\cdot\frac{t+3}{2}+1\right)\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t+7}{t^4}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{t^3}+\frac{7}{t^4}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{7}{3t^3}\right)+C=-\frac{3t+7}{6t^3}+C$$
$$=-\frac{3(2x-3)+7}{6(2x-3)^3}+C$$
$$=-\frac{3x-1}{3(2x-3)^3}+C$$

第８４回

(1) $\dfrac{1}{4}(x+3)^7(x-1)+C$

(2) $\log|x-5|-\dfrac{5}{x-5}+C$

(3) $-\dfrac{27x-20}{18(3x-2)^3}+C$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし} \quad x=g(t)$$

解説

(1) $x+3=t$ とおくと　$x=t-3,\ dx=dt$

よって

$$(与式)=\int\{2(t-3)-1\}t^6dt$$
$$=\int(2t-7)t^6dt=\int(2t^7-7t^6)dt$$
$$=\frac{1}{4}t^8-t^7+C=\frac{1}{4}t^7(t-4)+C$$
$$=\frac{1}{4}(x+3)^7\{(x+3)-4\}+C$$
$$=\frac{1}{4}(x+3)^7(x-1)+C$$

(2) $x-5=t$ とおくと　$x=t+5,\ dx=dt$

よって

$$(与式)=\int\frac{t+5}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{5}{t^2}\right)dt$$
$$=\log|t|-\frac{5}{t}+C$$
$$=\log|x-5|-\frac{5}{x-5}+C$$

(3) $3x-2=t$ とおくと　$x=\dfrac{t+2}{3},\ dx=\dfrac{1}{3}dt$

よって

$$(与式)=\int\left(9\cdot\frac{t+2}{3}-7\right)\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{3t-1}{t^4}dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{3}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)+C$$
$$=\frac{-9t+2}{18t^3}+C=\frac{-9(3x-2)+2}{18(3x-2)^3}+C$$
$$=-\frac{27x-20}{18(3x-2)^3}+C$$

第８５回

(1) $\dfrac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$

(2) $\dfrac{2}{3}(2x+7)\sqrt{x-1}+C$

(3) $-\dfrac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x}+C$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし} \quad x=g(t)$$

解説

(1) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$ から

$x=t^2-1,\ dx=2tdt$

よって

$$(与式)=\int(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-t^2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C$$
$$=\frac{2}{15}(x+1)\sqrt{x+1}\{3(x+1)-5\}+C$$
$$=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

(2) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと，$x-1=t^2$ から

$x=t^2+1,\ dx=2tdt$

よって

$$(与式)=\int\frac{2(t^2+1)+1}{t}\cdot 2tdt=2\int(2t^2+3)dt$$
$$=2\left(\frac{2}{3}t^3+3t\right)+C=\frac{2}{3}t(2t^2+9)+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\{2(x-1)+9\}+C$$
$$=\frac{2}{3}(2x+7)\sqrt{x-1}+C$$

(3) $\sqrt{2-x}=t$ とおくと，$2-x=t^2$ から

$x=2-t^2,\ dx=(-2t)dt$

よって

$$(与式)=\int\frac{2-t^2}{t}\cdot(-2t)dt=2\int(t^2-2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-6)+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{2-x}\{(2-x)-6\}+C$$
$$=-\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x}+C$$

第８６回

(1) $\dfrac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3}+C$

(2) $2(x-5)\sqrt{x+2}+C$

(3) $-\dfrac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}+C$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし} \quad x=g(t)$$

解説

(1) $\sqrt{x+3}=t$ とおくと，$x+3=t^2$ から

$x=t^2-3,\ dx=2tdt$

よって

$$(与式)=\int(t^2-3)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-3t^2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{5}t^5-t^3\right)+C=\frac{2}{5}t^3(t^2-5)+C$$
$$=\frac{2}{5}(x+3)\sqrt{x+3}\{(x+3)-5\}+C$$
$$=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3}+C$$

(2) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと，$x+2=t^2$ から

$x=t^2-2,\ dx=2tdt$

よって

$$(与式)=\int\frac{3(t^2-2)-1}{t}\cdot 2tdt=2\int(3t^2-7)dt$$
$$=2(t^3-7t)+C=2t(t^2-7)+C$$
$$=2\sqrt{x+2}\{(x+2)-7\}+C$$
$$=2(x-5)\sqrt{x+2}+C$$

(3) $\sqrt{4-x}=t$ とおくと，$4-x=t^2$ から

$x=4-t^2,\ dx=(-2t)dt$

よって

$$(与式)=\int\frac{4-t^2}{t}\cdot(-2t)dt=2\int(t^2-4)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-4t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-12)+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{4-x}\{(4-x)-12\}+C$$
$$=-\frac{2}{3}(x+8)\sqrt{4-x}+C$$

第８７回

(1) $\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$　(2) $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$

(3) $\frac{1}{3}(\log x)^3+C$　(4) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　ただし　$g(x)=u$

$\int \{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx=\frac{1}{\alpha+1}\{g(x)\}^{\alpha+1}+C$　$(\alpha\neq -1)$

解説

(1) $(x^3+2)'=3x^2$ であるから，$x^3+2=u$ とおくと

$(与式)=\int (x^3+2)^5(x^3+2)'dx=\int u^5du$

$=\frac{1}{6}u^6+C=\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$

別解　$(与式)=\int (x^3+2)^5(x^3+2)'dx$

$=\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$

(2) $(x^4)'=4x^3$ であるから，$x^4=u$ とおくと

$(与式)=\frac{1}{4}\int e^{x^4}(x^4)'dx=\frac{1}{4}\int e^u du$

$=\frac{1}{4}e^u+C=\frac{1}{4}e^{x^4}+C$

別解　$(与式)=\frac{1}{4}\int e^{x^4}(x^4)'dx=\frac{1}{4}e^{x^4}+C$

(3) $(\log x)'=\frac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

$(与式)=\int (\log x)^2(\log x)'dx=\int u^2du$

$=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(\log x)^3+C$

別解　$(与式)=\int (\log x)^2(\log x)'dx=\frac{1}{3}(\log x)^3+C$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$ であるから，$\cos x=u$ とおくと

$(与式)=-\int \cos^4 x(\cos x)'dx=-\int u^4du$

$=-\frac{1}{5}u^5+C=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

別解　$(与式)=-\int \cos^4 x(\cos x)'dx$

$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

第８８回

(1) $\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$　(2) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

(3) $\frac{1}{5}(\log x)^5+C$　(4) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　ただし　$g(x)=u$

$\int \{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx=\frac{1}{\alpha+1}\{g(x)\}^{\alpha+1}+C$　$(\alpha\neq -1)$

解説

(1) $(x^2-3)'=2x$ であるから，$x^2-3=u$ とおくと

$(与式)=\int (x^2-3)^4(x^2-3)'dx=\int u^4du$

$=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$

別解　$(与式)=\int (x^2-3)^4(x^2-3)'dx$

$=\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$

(2) $(x^3)'=3x^2$ であるから，$x^3=u$ とおくと

$(与式)=\frac{1}{3}\int e^{x^3}(x^3)'dx=\frac{1}{3}\int e^u du$

$=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

別解　$(与式)=\frac{1}{3}\int e^{x^3}(x^3)'dx=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$

(3) $(\log x)'=\frac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

$(与式)=\int (\log x)^4(\log x)'dx=\int u^4du$

$=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(\log x)^5+C$

別解　$(与式)=\int (\log x)^4(\log x)'dx$

$=\frac{1}{5}(\log x)^5+C$

(4) $(\sin x)'=\cos x$ であるから，$\sin x=u$ とおくと

$(与式)=\int \sin^3 x(\sin x)'dx=\int u^3du$

$=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

別解　$(与式)=\int \sin^3 x(\sin x)'dx$

$=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

第８９回

(1) $\log|x^2-1|+C$

(2) $\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+4|+C$

(3) $\log|\tan x|+C$

(4) $-\log|1+\cos x|+C$

(5) $\log|e^x+e^{-x}|+C$

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

解説

(1) $(与式)=\int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx$

$=\log|x^2-1|+C$

(2) $(与式)=\frac{1}{3}\int \frac{(x^3+3x^2+4)'}{x^3+3x^2+4}dx$

$=\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+4|+C$

(3) $(与式)=\int \frac{(\tan x)'}{\tan x}dx$

$=\log|\tan x|+C$

(4) $(与式)=-\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx$

$=-\log|1+\cos x|+C$

$(=-\log(1+\cos x)+C)$

注　$-1\leqq \cos x\leqq 1$ であるから

$1+\cos x\geqq 0$

また，分母は0でないから　$1+\cos x\neq 0$

よって　$1+\cos x>0$

(5) $(与式)=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$

$=\log|e^x+e^{-x}|+C$

$(=\log(e^x+e^{-x})+C)$

注　$e^x>0$，$e^{-x}>0$ であるから

$e^x+e^{-x}>0$

第９０回

(1) $\log|x^3+1|+C$

(2) $\frac{1}{2}\log|x^2+4x+1|+C$

(3) $\log|\log x|+C$

(4) $-\log|\sin x+\cos x|+C$

(5) $-\log|e^{-x}+3|+C$

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

解説

(1) $(与式)=\int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx$

$=\log|x^3+1|+C$

(2) $(与式)=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+1)'}{x^2+4x+1}dx$

$=\frac{1}{2}\log|x^2+4x+1|+C$

(3) $(与式)=\int \frac{(\log x)'}{\log x}dx$

$=\log|\log x|+C$

(4) $(与式)=-\int \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$

$=-\log|\sin x+\cos x|+C$

(5) $(与式)=-\int \frac{(e^{-x}+3)'}{e^{-x}+3}dx$

$=-\log|e^{-x}+3|+C$

$(=-\log(e^{-x}+3)+C)$

注　$e^{-x}>0$ であるから

$e^{-x}+3>0$

第９１回

(1)　$(x-1)e^x+C$

(2)　$-(x-1)\cos x+\sin x+C$

(3)　$-(3x+2)e^{-x}+C$

(4)　$(x+2)\log(x+2)-x+C$

(5)　$-\dfrac{1}{4x^2}(2\log x+1)+C$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

解説

(1)　$(与式)=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^x dx$
$=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$

(2)　$(与式)=\int (x-1)(-\cos x)'dx$
$=-(x-1)\cos x+\int \cos x\,dx$
$=-(x-1)\cos x+\sin x+C$

(3)　$(与式)=\int (3x-1)(-e^{-x})'dx$
$=-(3x-1)e^{-x}+\int 3e^{-x}dx$
$=-(3x-1)e^{-x}-3e^{-x}+C$
$=-(3x+2)e^{-x}+C$

(4)　$(与式)=\int (x+2)'\log(x+2)dx$
$=(x+2)\log(x+2)-\int (x+2)\cdot\dfrac{1}{x+2}dx$
$=(x+2)\log(x+2)-\int dx$
$=(x+2)\log(x+2)-x+C$

(5)　$(与式)=\int \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'\log x\,dx$
$=-\dfrac{1}{2x^2}\log x+\int \dfrac{1}{2x^2}\cdot\dfrac{1}{x}dx$
$=-\dfrac{1}{2x^2}\log x+\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{x^3}dx$
$=-\dfrac{1}{2x^2}\log x-\dfrac{1}{4x^2}+C$
$=-\dfrac{1}{4x^2}(2\log x+1)+C$

第９２回

(1)　$x\sin x+\cos x+C$

(2)　$(x+2)e^x+C$

(3)　$-\dfrac{1}{3}(2x-1)\cos 3x+\dfrac{2}{9}\sin 3x+C$

(4)　$(x-3)\log(x-3)-x+C$

(5)　$-\dfrac{1}{9x^3}(3\log x+1)+C$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

解説

(1)　$(与式)=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$
$=x\sin x+\cos x+C$

(2)　$(与式)=\int (x+3)(e^x)'dx$
$=(x+3)e^x-\int e^x dx$
$=(x+3)e^x-e^x+C$
$=(x+2)e^x+C$

(3)　$(与式)=\int (2x-1)\left(-\dfrac{1}{3}\cos 3x\right)'dx$
$=-\dfrac{1}{3}(2x-1)\cos 3x+\int 2\cdot\dfrac{1}{3}\cos 3x\,dx$
$=-\dfrac{1}{3}(2x-1)\cos 3x+\dfrac{2}{9}\sin 3x+C$

(4)　$(与式)=\int (x-3)'\log(x-3)dx$
$=(x-3)\log(x-3)-\int (x-3)\cdot\dfrac{1}{x-3}dx$
$=(x-3)\log(x-3)-\int dx$
$=(x-3)\log(x-3)-x+C$

(5)　$(与式)=\int \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)'\log x\,dx$
$=-\dfrac{1}{3x^3}\log x+\int \dfrac{1}{3x^3}\cdot\dfrac{1}{x}dx$
$=-\dfrac{1}{3x^3}\log x+\dfrac{1}{3}\int \dfrac{1}{x^4}dx$
$=-\dfrac{1}{3x^3}\log x-\dfrac{1}{9x^3}+C$
$=-\dfrac{1}{9x^3}(3\log x+1)+C$

第９３回

(1)　$\dfrac{1}{9}(6x-5)e^{3x}+C$

(2)　$\dfrac{1}{2}(4x-1)\sin 2x+\cos 2x+C$

(3)　$\dfrac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5)-x+C$

(4)　$\dfrac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3)-\dfrac{1}{2}x^2+C$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

解説

(1)　$(与式)=\int (2x-1)\left(\dfrac{1}{3}e^{3x}\right)'dx$
$=\dfrac{1}{3}(2x-1)e^{3x}-\int 2\cdot\dfrac{1}{3}e^{3x}dx$
$=\dfrac{1}{3}(2x-1)e^{3x}-\dfrac{2}{9}e^{3x}+C$
$=\dfrac{1}{9}(6x-5)e^{3x}+C$

(2)　$(与式)=\int (4x-1)\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$
$=\dfrac{1}{2}(4x-1)\sin 2x-\int 4\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x\,dx$
$=\dfrac{1}{2}(4x-1)\sin 2x+\cos 2x+C$

(3)　$(与式)=\int \left\{\dfrac{1}{3}(3x+5)\right\}'\log(3x+5)dx$
$=\dfrac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5)-\int \dfrac{1}{3}(3x+5)\cdot\dfrac{3}{3x+5}dx$
$=\dfrac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5)-\int dx$
$=\dfrac{1}{3}(3x+5)\log(3x+5)-x+C$

(4)　$(与式)=\int \left\{\dfrac{1}{2}(x^2+3)\right\}'\log(x^2+3)dx$
$=\dfrac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3)-\int \dfrac{1}{2}(x^2+3)\cdot\dfrac{2x}{x^2+3}dx$
$=\dfrac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3)-\int x\,dx$
$=\dfrac{1}{2}(x^2+3)\log(x^2+3)-\dfrac{1}{2}x^2+C$

第９４回

(1)　$-\dfrac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\dfrac{3}{4}\sin 2x+C$

(2)　$(3x+1)e^{2x}+C$

(3)　$\dfrac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1)-x+C$

(4)　$(e^x+2)\log(e^x+2)-e^x+C$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

解説

(1)　$(与式)=\int (3x-1)\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$
$=-\dfrac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\int 3\cdot\dfrac{1}{2}\cos 2x\,dx$
$=-\dfrac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\dfrac{3}{4}\sin 2x+C$

(2)　$(与式)=\int (6x+5)\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$
$=\dfrac{1}{2}(6x+5)e^{2x}-\int 6\cdot\dfrac{1}{2}e^{2x}dx$
$=\dfrac{1}{2}(6x+5)e^{2x}-\dfrac{3}{2}e^{2x}+C$
$=(3x+1)e^{2x}+C$

(3)　$(与式)=\int \left\{\dfrac{1}{4}(4x-1)\right\}'\log(4x-1)dx$
$=\dfrac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1)-\int \dfrac{1}{4}(4x-1)\cdot\dfrac{4}{4x-1}dx$
$=\dfrac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1)-\int dx$
$=\dfrac{1}{4}(4x-1)\log(4x-1)-x+C$

(4)　$(与式)=\int (e^x+2)'\log(e^x+2)dx$
$=(e^x+2)\log(e^x+2)-\int (e^x+2)\cdot\dfrac{e^x}{e^x+2}dx$
$=(e^x+2)\log(e^x+2)-\int e^x dx$
$=(e^x+2)\log(e^x+2)-e^x+C$

第９５回

(1) $x+2\log|x+1|+C$

(2) $\dfrac{1}{2}x^2+3x+7\log|x-1|+C$

(3) $\dfrac{1}{5}\log\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+C$

(4) $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$

(5) $\log|x+1|(x-1)^2+C$

> (分子の次数)<(分母の次数) と変形
> 部分分数に分解

解説

(1) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(x+1)+2}{x+1}dx$

$=\displaystyle\int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$=x+2\log|x+1|+C$

(2) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(x-1)(x+3)+7}{x-1}dx$

$=\displaystyle\int\left(x+3+\frac{7}{x-1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+3x+7\log|x-1|+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{5}(\log|x-2|-\log|x+3|)+C$

$=\dfrac{1}{5}\log\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+C$

(4) (与式)$=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

$=\displaystyle\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}(\log|x-1|-\log|x+2|)+C$

$=\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}dx$

$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$=\log|x+1|+2\log|x-1|+C$

$=\log|x+1||x-1|^2+C$

$=\log|x+1|(x-1)^2+C$

第９６回

(1) $x+3\log|x+2|+C$

(2) $\dfrac{1}{2}x^2-x-5\log|x-3|+C$

(3) $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C$

(4) $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right|+C$

(5) $\log|x+2|^3(x-2)^2+C$

> (分子の次数)<(分母の次数) と変形
> 部分分数に分解

解説

(1) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(x+2)+3}{x+2}dx$

$=\displaystyle\int\left(1+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$=x+3\log|x+2|+C$

(2) (与式)$=\displaystyle\int\frac{(x-3)(x-1)-5}{x-3}dx$

$=\displaystyle\int\left(x-1-\frac{5}{x-3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-x-5\log|x-3|+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{4}(\log|x-1|-\log|x+3|)+C$

$=\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C$

(4) (与式)$=\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x-5)}$

$=\displaystyle\int\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{6}(\log|x-5|-\log|x+1|)+C$

$=\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right|+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}dx$

$=\displaystyle\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}\right)dx$

$=3\log|x+2|+2\log|x-2|+C$

$=\log|x+2|^3|x-2|^2+C$

$=\log|x+2|^3(x-2)^2+C$

第９７回

(1) $x-\sin x+C$

(2) $x+\cos x+C$

(3) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

(4) $-\dfrac{1}{16}\cos 8x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

(5) $\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

> 三角関数の公式を用いて，次数を下げる

解説

(1) (与式)$=\displaystyle\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$

$=\displaystyle\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\displaystyle\int(1-\cos x)dx=x-\sin x+C$

(2) (与式)

$=\displaystyle\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\displaystyle\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\sin^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\cos^2 x\,dx$

$=\displaystyle\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

(4) (与式)$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\sin 8x+\sin 2x)dx$

$=-\dfrac{1}{16}\cos 8x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

(与式)$=\displaystyle\int t^2(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C$

$=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

別解 (与式)$=\displaystyle\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$=\displaystyle\int\sin^2 x\cos x\,dx-\int\sin^4 x\cos x\,dx$

$=\displaystyle\int\sin^2 x(\sin x)'dx-\int\sin^4 x(\sin x)'dx$

$=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

第９８回

(1) $x-\cos x+C$

(2) $x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

(3) $x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

(4) $-\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{12}\sin 6x+C$

(5) $\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$

> 三角関数の公式を用いて，次数を下げる

解説

(1) (与式)$=\displaystyle\int\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx$

$=\displaystyle\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$

$=\displaystyle\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$

(2) (与式)$=\displaystyle\int(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)dx$

$=\displaystyle\int(1+\sin 2x)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

(3) (与式)$=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 2\sin x\cos x\,dx$

$=2\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=2\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

(4) (与式)$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\cos 8x-\cos 6x)dx$

$=-\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{12}\sin 6x+C$

(5) (与式)$=\displaystyle\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

(与式)$=-\displaystyle\int(1-t^2)t^2dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C$

$=\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$

別解 (与式)$=\displaystyle\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\,dx$

$=\displaystyle\int\cos^2 x\sin x\,dx-\int\cos^4 x\sin x\,dx$

$=-\displaystyle\int\cos^2 x(\cos x)'dx+\int\cos^4 x(\cos x)'dx$

$=\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$

第９９回

(1) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$

(2) $x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$

(3) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

> 部分積分法を利用しても，まだ積の形が残るときは，更に部分積分法を利用する

解説

(1) $(与式)=\int x^2(-e^{-x})'dx$

$$=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx$$
$$=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'dx$$
$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$
$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$$
$$=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

(2) $(与式)=\int (x)'(\log x)^2dx$

$$=x(\log x)^2-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=x(\log x)^2-2\int (x)'\log x\,dx$$
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2\int dx$$
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

(3) $(与式)=\int (e^x)'\sin x\,dx$

$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-\int (e^x)'\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x(-\sin x)dx$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

ゆえに　$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

別解　$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$　……①

$(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x$　……②

①−②より　$(e^x\sin x-e^x\cos x)'=2e^x\sin x$

ゆえに　$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

第１００回

(1) $\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+C$

(2) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

(3) $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

> 部分積分法を利用しても，まだ積の形が残るときは，更に部分積分法を利用する

解説

(1) $(与式)=\int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'(\log x)^2dx$

$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int \frac{1}{2}x^2\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int x\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\frac{1}{2}x^2\log x+\int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\log x)^2-\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+C$$

(2) $(与式)=\int x^2(-\cos x)'dx$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int \sin x\,dx$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

(3) $(与式)=\int (e^x)'\cos x\,dx$

$$=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx$$
$$=e^x\cos x+\int (e^x)'\sin x\,dx$$
$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

ゆえに　$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

別解　$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x$　……①

$(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x$　……②

①＋②より　$(e^x\sin x+e^x\cos x)'=2e^x\cos x$

ゆえに　$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

第１０１回

(1) $-\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x}+C$

(2) $-\frac{1}{2e^{x^2-2x}}+C$

(3) $-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+\sin 2x+C$

解説

(1) $\sqrt{1-3x}=t$ とおくと，$1-3x=t^2$ から

$x=\frac{1-t^2}{3}$，$dx=\left(-\frac{2}{3}t\right)dt$

よって

$$(与式)=\int \frac{\frac{1-t^2}{3}+1}{t}\cdot\left(-\frac{2}{3}t\right)dt$$
$$=\frac{2}{9}\int (t^2-4)dt$$
$$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}t^3-4t\right)+C$$
$$=\frac{2}{27}t(t^2-12)+C$$
$$=\frac{2}{27}\sqrt{1-3x}\{(1-3x)-12\}+C$$
$$=-\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x}+C$$

(2) $(x^2-2x)'=2x-2$ であるから，$x^2-2x=u$ とおくと

$$(与式)=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2-2x)'}{e^{x^2-2x}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^u}du=\frac{1}{2}\int e^{-u}du$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-u}+C=-\frac{1}{2e^u}+C$$
$$=-\frac{1}{2e^{x^2-2x}}+C$$

(3) $(与式)=\int (4x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$

$$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+\int 4\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+2\int \cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+\sin 2x+C$$

第１０２回

(1) $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\log|x|+C$

(2) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(3) $\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C$

解説

(1) $(与式)=\int \left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2dx$

$$=\int \left(x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$$
$$=\int \left(x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}+\log|x|+C$$
$$=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\log|x|+C$$
$$\left(=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\log x+C\right)$$

注　被積分関数の形から $x>0$ であり，$\log|x|=\log x$ となる。

(2) $(与式)=\int (1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$$=\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$$(与式)=-\int (1-2t^2+t^4)dt$$
$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C$$
$$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

(3) $e^x=t$ とおくと　$e^x dx=dt$

$$(与式)=\int \frac{dt}{t^2-9}=\int \frac{dt}{(t+3)(t-3)}$$
$$=\int \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$
$$=\frac{1}{6}(\log|t-3|-\log|t+3|)+C$$
$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C$$
$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C$$
$$\left(=\frac{1}{6}\log\frac{|e^x-3|}{e^x+3}+C\right)$$

第１０３回

(1) $\dfrac{4}{9}$

(2) $-\dfrac{7}{12}$

(3) $\sqrt{2}-1$

(4) $\dfrac{484}{5}$

(5) $\dfrac{9\sqrt[3]{9}}{5}-10\sqrt[5]{3}+3$

(6) $e-\dfrac{1}{e}-2$

(7) $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{8}{5}$

(8) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$

> $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると
> $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

解説

(1) $(与式)=\displaystyle\int_1^3 x^{-3}dx=\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^3$

$=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}-1\right)=\dfrac{4}{9}$

(2) $(与式)=\displaystyle\int_1^0 t^{\frac{5}{7}}dt=\left[\frac{7}{12}t^{\frac{12}{7}}\right]_1^0$

$=\dfrac{7}{12}(0-1)=-\dfrac{7}{12}$

(3) $(与式)=\displaystyle\int_2^4 y^{-\frac{3}{2}}dy=\left[-2y^{-\frac{1}{2}}\right]_2^4$

$=-2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}-1$

(4) $(与式)=\displaystyle\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^9$

$=\dfrac{2}{5}(243-1)$

$=\dfrac{484}{5}$

(5) $(与式)=\displaystyle\int_0^3\left(x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{5}}+1\right)dx$

$=\left[\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-4\cdot\dfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}+x\right]_0^3$

$=\dfrac{3}{5}\cdot3\sqrt[3]{3^2}-\dfrac{10}{3}\cdot3\sqrt[5]{3}+3$

$=\dfrac{9\sqrt[3]{9}}{5}-10\sqrt[5]{3}+3$

(6) $(与式)=\displaystyle\int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)^2dx$

$=\displaystyle\int_1^e\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\left[x-2\log x-\dfrac{1}{x}\right]_1^e$

$=\left(e-2-\dfrac{1}{e}\right)-(1-1)$

$=e-\dfrac{1}{e}-2$

(7) $(与式)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}\Big[\log(x+1)-\log(x+4)\Big]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}\left[\log\dfrac{x+1}{x+4}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{3}\left(\log\dfrac{2}{5}-\log\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\log\dfrac{8}{5}$

(8) $(与式)=\displaystyle\int_2^8\frac{dx}{(x+1)(x-1)}$

$=\displaystyle\int_2^8\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\Big[\log(x-1)-\log(x+1)\Big]_2^8$

$=\dfrac{1}{2}\left[\log\dfrac{x-1}{x+1}\right]_2^8$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{7}{9}-\log\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$

第１０４回

(1) $\dfrac{7}{24}$

(2) $-\dfrac{10\sqrt[5]{4}}{7}$

(3) $\dfrac{52}{81}$

(4) $\dfrac{254}{7}$

(5) $-\dfrac{19}{22}$

(6) $e-\dfrac{9}{e}+14$

(7) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{35}{27}$

(8) $\dfrac{1}{4}\log\dfrac{21}{13}$

> $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると
> $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

解説

(1) $(与式)=\displaystyle\int_1^2 x^{-4}dx=\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^2$

$=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{8}-1\right)=\dfrac{7}{24}$

(2) $(与式)=\displaystyle\int_2^0 x^{\frac{2}{5}}dx=\left[\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}\right]_2^0$

$=\dfrac{5}{7}(0-2\sqrt[5]{4})=-\dfrac{10\sqrt[5]{4}}{7}$

(3) $(与式)=\displaystyle\int_1^9 y^{-\frac{5}{2}}dy$

$=\left[-\dfrac{2}{3}y^{-\frac{3}{2}}\right]_1^9$

$=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{27}-1\right)=\dfrac{52}{81}$

(4) $(与式)=\displaystyle\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}dx$

$=\left[\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_1^4$

$=\dfrac{2}{7}(128-1)=\dfrac{254}{7}$

(5) $(与式)=\displaystyle\int_0^1\left(x^{\frac{4}{7}}-6x^{\frac{1}{3}}+3\right)dx$

$=\left[\dfrac{7}{11}x^{\frac{11}{7}}-6\cdot\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+3x\right]_0^1$

$=\dfrac{7}{11}-\dfrac{9}{2}+3$

$=\dfrac{14-99+66}{22}$

$=-\dfrac{19}{22}$

(6) $(与式)=\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{3}{x}\right)^2dx$

$=\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)dx$

$=\left[x+6\log x-\dfrac{9}{x}\right]_1^e$

$=\left(e+6-\dfrac{9}{e}\right)-(1-9)$

$=e-\dfrac{9}{e}+14$

(7) $(与式)=\displaystyle\int_2^6\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\Big[\log(x+1)-\log(x+3)\Big]_2^6$

$=\dfrac{1}{2}\left[\log\dfrac{x+1}{x+3}\right]_2^6$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{7}{9}-\log\dfrac{3}{5}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{35}{27}$

(8) $(与式)=\displaystyle\int_5^{11}\frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

$=\displaystyle\int_5^{11}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{4}\Big[\log(x-2)-\log(x+2)\Big]_5^{11}$

$=\dfrac{1}{4}\left[\log\dfrac{x-2}{x+2}\right]_5^{11}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\log\dfrac{9}{13}-\log\dfrac{3}{7}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\log\dfrac{21}{13}$

第１０５回

(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\sqrt{3}-1$
(3) $\frac{7}{\log 2}$　(4) 2　(5) $\frac{\pi}{4}$
(6) $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{12}$　(7) $\frac{1}{8}$

> $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると
> $$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

解説

(1) $(\text{与式})=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$

(2) $(\text{与式})=\Big[\tan t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-1$

(3) $(\text{与式})=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^3=\frac{8-1}{\log 2}=\frac{7}{\log 2}$

(4) $(\text{与式})=\Big[-2\cos x+\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(-2\cdot 0+1)-(-2\cdot 0-1)=2$

(5) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

(6) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-1\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}\tan 3x-x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$

$=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{12}$

(7) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{8}$

第１０６回

(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\sqrt{3}-1$
(3) $\frac{1}{2}(e^4-1)$　(4) 4　(5) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$
(6) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{24}$　(7) $\frac{1}{2}$

> $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると
> $$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

解説

(1) $(\text{与式})=\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$

(2) $(\text{与式})=\left[-\frac{1}{\tan t}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$

$=\sqrt{3}-1$

(3) $(\text{与式})=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^4-1)$

(4) $(\text{与式})=\Big[2\sin x-3\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(2\cdot 1-3\cdot 0)-\{2\cdot(-1)-3\cdot 0\}=4$

(5) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

(6) $(\text{与式})=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\tan 2x-x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{24}$

(7) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$

第１０７回

(1) 10
(2) $\frac{106}{15}$
(3) $\log\frac{e+1}{2}$

> $x=g(t)$ とおき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば
> $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

解説

(1) $2x-1=t$ とおくと

x	$0 \to 2$
t	$-1 \to 3$

$x=\frac{t+1}{2}$，$dx=\frac{1}{2}dt$

$(\text{与式})=\int_{-1}^3 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^3$

$=\frac{1}{8}(81-1)=10$

別解　$(\text{与式})=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x-1)^4\right]_0^2=\frac{1}{8}(81-1)=10$

(2) $\sqrt{4-x}=t$ とおくと

x	$0 \to 3$
t	$2 \to 1$

$x=4-t^2$，$dx=-2tdt$

$(\text{与式})=\int_2^1\frac{(4-t^2)^2}{t}\cdot(-2t)dt$

$=2\int_1^2(t^4-8t^2+16)dt$

$=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+16t\right]_1^2$

$=2\left\{\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{8}{3}+16\right)\right\}$

$=\frac{106}{15}$

(3) $e^x+1=t$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$2 \to e+1$

$e^x dx=dt$

$(\text{与式})=\int_2^{e+1}\frac{1}{t}dt=\Big[\log t\Big]_2^{e+1}$

$=\log(e+1)-\log 2=\log\frac{e+1}{2}$

別解　$(\text{与式})=\int_0^1\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1$

$=\log(e+1)-\log 2=\log\frac{e+1}{2}$

第１０８回

(1) $\frac{11}{5}$
(2) $\frac{46}{15}$
(3) $\frac{1}{3}$

> $x=g(t)$ とおき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば
> $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

解説

(1) $3x-2=t$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$-2 \to 1$

$x=\frac{t+2}{3}$，$dx=\frac{1}{3}dt$

$(\text{与式})=\int_{-2}^1 t^4\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{-2}^1$

$=\frac{1}{15}\{1-(-32)\}=\frac{11}{5}$

別解　$(\text{与式})=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x-2)^5\right]_0^1$

$=\frac{1}{15}\{1-(-32)\}=\frac{11}{5}$

(2) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと

x	$-1 \to 2$
t	$1 \to 2$

$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$(\text{与式})=\int_1^2(t^2-2)t\cdot 2tdt$

$=2\int_1^2(t^4-2t^2)dt=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right]_1^2$

$=2\left\{\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$=\frac{46}{15}$

(3) $\sin x=t$ とおくと

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

$\cos x\,dx=dt$

$(\text{与式})=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

別解　$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(\sin x)'dx$

$=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$

第１０９回

(1) π

(2) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(3) $\dfrac{\pi}{16}$

$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分は　$x=a\sin\theta$ とおく
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$　の定積分は　$x=a\tan\theta$ とおく

解説

(1) $x=2\sin\theta$ とおくと
$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$0\ \to\ 2$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$

また，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき
$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}$
$=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$

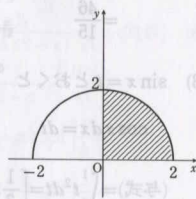
ゆえに

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)2\cos\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

別解　$y=\sqrt{4-x^2}$ のグラフは，下の図のような半円を表す。
したがって，定積分
$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから

$(与式)=\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$

(2) $x=\sin\theta$ とおくと
$dx=\cos\theta\,d\theta$

x	$0\ \to\ \dfrac{1}{2}$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

また，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき
$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$
$=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

ゆえに

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(3) $x=4\tan\theta$ とおくと
$dx=\dfrac{4}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \to\ 4$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{4}$

ゆえに

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{16(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}d\theta=\left[\frac{1}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{16}$$

第１１０回

(1) $\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

(2) $\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{7}{12}\pi$

$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分は　$x=a\sin\theta$ とおく
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$　の定積分は　$x=a\tan\theta$ とおく

解説

(1) $x=3\sin\theta$ とおくと
$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x	$0\ \to\ \dfrac{3}{2}$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

また，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき
$\cos\theta>0$ であるから

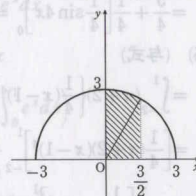
$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}$
$=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$

ゆえに

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(3\cos\theta)3\cos\theta\,d\theta$$
$$=9\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=9\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

別解　$y=\sqrt{9-x^2}$ のグラフは，下の図のような半円を表す。
したがって，定積分
$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから
(与式)
$=\dfrac{1}{2}\cdot3^2\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと
$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$0\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{3}$

また，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき
$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}$
$=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$

ゆえに

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと
$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$-1\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$-\dfrac{\pi}{4}\ \to\ \dfrac{\pi}{3}$

ゆえに

$$(与式)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{12}\pi$$

第１１１回

(1) π　(2) $2e^3$

(3) $-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\frac{\pi}{2}-4$　(5) $\frac{64}{3}$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説

(1) $(\text{与式})=\int_0^{\pi} x(-\cos x)'dx$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

(2) $(\text{与式})=\int_1^3 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_1^3-\int_1^3 e^x dx$

$$=3e^3-e-\Big[e^x\Big]_1^3=3e^3-e-(e^3-e)$$

$$=2e^3$$

(3) (与式)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left\{-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}'dx$$

$$=\left[-x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) $(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-3)(\sin x)'dx$

$$=\Big[(x-3)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-3-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-3-1=\frac{\pi}{2}-4$$

(5) $(\text{与式})=\int_{-1}^3(x+1)\left\{\frac{1}{3}(x-3)^3\right\}'dx$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)(x-3)^3\right]_{-1}^3-\int_{-1}^3\frac{1}{3}(x-3)^3dx$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x-3)^4\right]_{-1}^3$$

$$=-\frac{1}{12}\{0-(-4)^4\}=\frac{64}{3}$$

第１１２回

(1) -2　(2) $2\log 2-\frac{3}{4}$

(3) $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$　(4) $\frac{21}{16}$　(5) $-\frac{243}{20}$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説

(1) $(\text{与式})=\int_0^{\pi} x(\sin x)'dx$

$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=-\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-2$$

(2) (与式)

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=2\log 2-\frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx=2\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=2\log 2-\frac{1}{4}(4-1)=2\log 2-\frac{3}{4}$$

(3) $(\text{与式})=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$$=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

(4) (与式)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(x+5)\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}(x+5)\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{4}\cos 4x\,dx$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{5}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16}$$

(5) (与式)

$$=\int_{-2}^1(x+2)\left\{\frac{1}{4}(x-1)^4\right\}'dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x+2)(x-1)^4\right]_{-2}^1-\int_{-2}^1\frac{1}{4}(x-1)^4dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{-2}^1=-\frac{1}{20}\{0-(-3)^5\}=-\frac{243}{20}$$

第１１３回

(1) $4\log 2-\frac{15}{16}$　(2) $1-\frac{2}{e}$

(3) $3\log 3-2$　(4) $e-2$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説

(1) $(\text{与式})=\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log x\,dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=4\log 2-\frac{1}{4}\int_1^2 x^3dx$$

$$=4\log 2-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2$$

$$=4\log 2-\frac{15}{16}$$

(2) $(\text{与式})=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\int_1^e\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(3) (与式)

$$=\int_{-2}^0(x+3)'\log(x+3)dx$$

$$=\Big[(x+3)\log(x+3)\Big]_{-2}^0-\int_{-2}^0(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}dx$$

$$=3\log 3-\int_{-2}^0 dx=3\log 3-\Big[x\Big]_{-2}^0$$

$$=3\log 3-2$$

(4) $(\text{与式})=\int_0^1 x^2(e^x)'dx$

$$=\Big[x^2e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^xdx$$

$$=e-2\int_0^1 x(e^x)'dx$$

$$=e-2\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)$$

$$=e-2e+2\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=-e+2(e-1)=e-2$$

第１１４回

(1) $9\log 3-\frac{26}{9}$　(2) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$

(3) $5\log 5-4$　(4) π^2-4

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

解説

(1) $(\text{与式})=\int_1^3\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^3-\int_1^3\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=9\log 3-\frac{1}{3}\int_1^3 x^2dx$$

$$=9\log 3-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3=9\log 3-\frac{26}{9}$$

(2) $(\text{与式})=\int_1^e\left(-\frac{1}{2x^2}\right)'\log x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{2x^2}\log x\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\int_1^e\frac{dx}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$$

(3) (与式)

$$=\int_{-3}^1(x+4)'\log(x+4)dx$$

$$=\Big[(x+4)\log(x+4)\Big]_{-3}^1-\int_{-3}^1(x+4)\cdot\frac{1}{x+4}dx$$

$$=5\log 5-\int_{-3}^1 dx=5\log 5-\Big[x\Big]_{-3}^1$$

$$=5\log 5-4$$

(4) $(\text{与式})=\int_0^{\pi} x^2(-\cos x)'dx$

$$=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx$$

$$=\pi^2+2\int_0^{\pi}x(\sin x)'dx$$

$$=\pi^2+2\left(\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)$$

$$=\pi^2-2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\pi^2-4$$

第１１５回

(1) $5-4\sqrt{2}+\log 2$

(2) $-\frac{4}{3}$

(3) $\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}$

(4) $\frac{\pi}{6}$

(5) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\log\frac{1}{2}$

解説

(1) (与式)$=\int_1^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

$=\int_1^2\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\left[x-4x^{\frac{1}{2}}+\log x\right]_1^2$

$=(2-4\sqrt{2}+\log 2)-(1-4)$

$=5-4\sqrt{2}+\log 2$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと

$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	$0\ \to\ 3$
t	$1\ \to\ 2$

(与式)$=\int_1^2\frac{(t^2-1)-2}{t}\cdot 2tdt$

$=2\int_1^2(t^2-3)dt$

$=2\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_1^2$

$=2\left\{\left(\frac{8}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right)\right\}=-\frac{4}{3}$

(3) $x^3+1=t$ とおくと

$3x^2dx=dt$

x	$-1\ \to\ 0$
t	$0\ \to\ 1$

(与式)$=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 e^{x^3+1}\cdot 3x^2dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{3}\left[e^t\right]_0^1=\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}$

別解 (与式)$=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 e^{x^3+1}\cdot(x^3+1)'dx$

$=\frac{1}{3}\left[e^{x^3+1}\right]_{-1}^0=\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}$

(4) $x=3\sin\theta$ とおくと

$dx=3\cos\theta\,d\theta$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき

x	$0\ \to\ \frac{3}{2}$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{6}$

$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}$

$=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$

ゆえに　(与式)$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\cos\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

(5) (与式)$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'dx$

$=\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\left[\log(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\log\frac{1}{2}$

$\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2\right)$

第１１６回

(1) $4\sqrt{3}-2-3\log 3$

(2) $\frac{8}{3}$

(3) $\frac{2}{15}$

(4) $\frac{\pi}{4}$

(5) $1-\frac{3}{e}$

解説

(1) (与式)$=\int_1^3\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x}dx$

$=\int_1^3\left(1+2x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{x}\right)dx$

$=\left[x+4x^{\frac{1}{2}}-3\log x\right]_1^3$

$=(3+4\sqrt{3}-3\log 3)-(1+4)$

$=4\sqrt{3}-2-3\log 3$

(2) $\sqrt{x+3}=t$ とおくと

$x=t^2-3$，$dx=2tdt$

x	$-2\ \to\ 1$
t	$1\ \to\ 2$

(与式)$=\int_1^2\frac{(t^2-3)+2}{t}\cdot 2tdt$

$=2\int_1^2(t^2-1)dt$

$=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^2$

$=2\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=\frac{8}{3}$

(3) (与式)$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと

$\cos x\,dx=dt$

x	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$
t	$0\ \to\ 1$

(与式)$=\int_0^1 t^2(1-t^2)dt$

$=\int_0^1(t^2-t^4)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

別解 (与式)$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin^4 x)(\sin x)'dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin^2 x(\sin x)'-\sin^4 x(\sin x)'\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

(4) $x=2\tan\theta$ とおくと

$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-2\ \to\ 2$
θ	$-\frac{\pi}{4}\ \to\ \frac{\pi}{4}$

(与式)$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\frac{\pi}{4}$

(5) (与式)$=\int_0^1(2x-1)(-e^{-x})'dx$

$=\left[-(2x-1)e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}dx$

$=-\left(\frac{1}{e}+1\right)+2\left[-e^{-x}\right]_0^1$

$=-\frac{1}{e}-1-2\left(\frac{1}{e}-1\right)$

$=1-\frac{3}{e}$

第１１７回

(1)　10
(2)　$e-1$
(3)　$\frac{1}{2}\log 2$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$

ただし　$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

解説

(1)　(与式)$=\int_0^1(2x+1)^3dx$

$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{8}(81-1)=10$

(2)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1$

$=e-1$

(3)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}\log 2$

第１１８回

(1)　$\frac{11}{5}$
(2)　$\frac{2}{\pi}$
(3)　$\frac{5}{72}$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$

ただし　$\Delta x=\frac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

解説

(1)　(与式)$=\int_0^1(3x-1)^4dx$

$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(3x-1)^5\right]_0^1$

$=\frac{1}{15}\{32-(-1)\}=\frac{11}{5}$

(2)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$

$=\frac{2}{\pi}$

(3)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(2n+k)^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^3}$

$=\int_0^1\frac{dx}{(2+x)^3}$

$=\left[-\frac{1}{2(2+x)^2}\right]_0^1$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{72}$

第１１９回

(1)　1
(2)　2
(3)　$\frac{1}{9}$
(4)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n+1)(n+3)}\}^2-\{\sqrt{n(n+2)}\}^2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+4n+3)-(n^2+2n)}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$=\frac{2}{\sqrt{1\cdot1}+\sqrt{1}}$

$=1$

(2)　(与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{2+0}{1+0}=2$

(3)　$\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}$

$=\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x-1)(2x+1)}$

$=\frac{(2x+1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)(2x+1)}$

$=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)(2x+1)}=\frac{1}{(x+2)(2x+1)}$

よって

(与式)$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+2)(2x+1)}=\frac{1}{3\cdot3}=\frac{1}{9}$

(4)　(与式)$=\lim_{x\to0}\frac{\{(x^2+x+4)-(x^2+4)\}\sin 2x}{(\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4})x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{(\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4})x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2$

$=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\cdot1\cdot2=\frac{1}{4}\cdot1\cdot2=\frac{1}{2}$

第１２０回

(1)　$-\frac{3}{2}$
(2)　$\frac{1}{3}$
(3)　$\frac{1}{2}$
(4)　$\log 2$

解説

(1)　$x=-t$ とおくと

$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

よって

(与式)

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}+1}$

$=\frac{-3}{\sqrt{1}+1}=-\frac{3}{2}$

(2)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって

(与式)$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{3}\cdot1\cdot1=\frac{1}{3}$

(3)　(与式)

$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$

$=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(4)　(与式)$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$

$=\log(1+\sqrt{1})=\log 2$

第１２１回

(1) $-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

(2) $\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(3) $-\dfrac{\tan x}{x}-\dfrac{\log|\cos x|}{x^2}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

解説

(1) $y'=\dfrac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

別解 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{-(1+x^2)+2}{1+x^2}=-1+\dfrac{2}{1+x^2}$

$=-1+2(1+x^2)^{-1}$

よって

$y'=2\{-(1+x^2)^{-2}(1+x^2)'\}$

$=-2(1+x^2)^{-2}\cdot 2x$

$=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

(2) $y'=\dfrac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(3) $y'=\dfrac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}\cdot x-\log|\cos x|\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{-x\cdot\tan x-\log|\cos x|}{x^2}$

$=-\dfrac{\tan x}{x}-\dfrac{\log|\cos x|}{x^2}$

(4) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

第１２２回

(1) $-\dfrac{2}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}(x+2)}$

(2) $(e^x+e^{-x})(\cos x-\sin x)$

(3) $\dfrac{1}{x(\log x+1)^2}$

(4) $\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$

解説

(1) $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{-1\cdot(x+2)-(2-x)\cdot 1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+2}{2-x}}\cdot\dfrac{-4}{(x+2)^2}$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}(x+2)}$

(2) $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$+e^x\cos x+e^x(-\sin x)$

$=(e^x+e^{-x})(\cos x-\sin x)$

(3) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot(\log x+1)-(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x+1)^2}$

$=\dfrac{1}{x(\log x+1)^2}$

(4) $2+\sin x>0$，$2-\sin x>0$ であるから

$y=\log(2+\sin x)-\log(2-\sin x)$

よって

$y'=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}-\dfrac{-\cos x}{2-\sin x}$

$=\dfrac{\cos x(2-\sin x)+\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)(2-\sin x)}$

$=\dfrac{4\cos x}{4-\sin^2 x}$

第１２３回

(1) $\dfrac{1}{5}(x^2+x-1)\sqrt{2x+1}+C$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{108}\pi+\dfrac{1}{24}$

(3) $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$　　(4) $2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\log\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $\sqrt{2x+1}=t$ とおくと　$2x+1=t^2$

よって　$x=\dfrac{t^2-1}{2}$

また　$dx=tdt$　であるから

$(与式)=\displaystyle\int\left\{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+\frac{t^2-1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{t}\cdot tdt$

$=\displaystyle\int\frac{t^4-1}{4}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}t^5-t\right)+C$

$=\dfrac{1}{20}t(t^4-5)+C$

$=\dfrac{1}{20}\{(\sqrt{2x+1})^4-5\}\sqrt{2x+1}+C$

$=\dfrac{1}{5}(x^2+x-1)\sqrt{2x+1}+C$

(2) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$　よって

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{6}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(3+x^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\{3(1+\tan^2\theta)\}^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\left[\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{108}\pi+\dfrac{1}{24}$

(3) $x\geqq 0$ のとき　$|xe^x|=xe^x$

$x\leqq 0$ のとき　$|xe^x|=-xe^x$

よって

$(与式)=\displaystyle\int_{-1}^0(-xe^x)dx+\int_0^1 xe^x dx$

ここで $\displaystyle\int xe^x dx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int e^x dx$

$=e^x(x-1)+C$

であるから

$(与式)=-\Big[e^x(x-1)\Big]_{-1}^0+\Big[e^x(x-1)\Big]_0^1$

$=-(-1)+\dfrac{1}{e}\cdot(-2)+0-(-1)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

(4) $(与式)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx$

$=\left[2\tan\dfrac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\log|1+\cos x|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\log 1-\log\dfrac{3}{2}\right)$

$=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\log\dfrac{3}{2}$

第１２４回

(1) $\dfrac{1}{4}\log|x+1||x-3|^3+C$

(2) $\log(\sqrt{2}+1)$

(3) $-\dfrac{2}{3}\log 2+\log 3$　　(4) $\dfrac{9}{4}\pi$

解説

(1) $(与式)=\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x-3)}dx$

$$=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}(\log|x+1|+3\log|x-3|)+C$$

$$=\frac{1}{4}\log|x+1||x-3|^3+C$$

(2) $(与式)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

x	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$
t	$0 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって

$(与式)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1-t^2}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+t|-\log|1-t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)$$

(3) $(与式)=\displaystyle\int_1^3\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(x+1)dx$

$$=\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\log(x+1)\right]_1^3+\int_1^3\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$=-\frac{\log 4}{3}+\log 2+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{\log 2}{3}+\Big[\log|x|-\log|x+1|\Big]_1^3$$

$$=\frac{\log 2}{3}+(\log 3-\log 4)-(0-\log 2)$$

$$=-\frac{2}{3}\log 2+\log 3$$

(4) $6x-x^2=9-(x-3)^2$

$x-3=3\sin\theta$ とおくと

$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \to 3$
θ	$-\dfrac{\pi}{2} \to 0$

また，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{9-(x-3)^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

ゆえに

$(与式)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(3\cos\theta)\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$$=9\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,d\theta=9\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0=\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$$

別解　$y=\sqrt{6x-x^2}$ のグラフは，下の図のような半円を表す。

したがって，定積分

$\displaystyle\int_0^3\sqrt{6x-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから

$(与式)=\dfrac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9}{4}\pi$

22643A　230901